PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE*

Ferdinand GONSETH

INTRODUCTION

1. L'étude qui suit a pour but de préparer la réponse à la question : «Qu'est-ce que les années 1937 et 1938 ont apporté de neuf à la philosophie mathématique ?» [1]. C'est là, chacun en conviendra, une tâche assez épineuse. Peut-être le serait-elle moins, si elle pouvait simplement faire suite à une étude sur les apports de l'année 1936 ? Elle trouverait un cadre tout préparé pour s'y insérer, et les points de repère nécessaires pour situer et pour apprécier les efforts individuels. Elle disposerait, pour juger le nouveau, du terme indispensable de comparaison, qui est l'acquis, l'existant, le connu. Or, pour incommode que cela soit, la présente étude ne vient pas en second : elle devra donc elle-même pourvoir à tout ce qu'elle aurait aimé trouver, et dont elle ne saurait se passer.

Une recherche de philosophie a rarement une existence autonome. Une bonne part de sa signification lui vient de ses rapports avec les problèmes de l'heure. Et ceux-ci, à leur tour, peuvent être rarement saisis sans explications préalables, qui éclairent leur histoire et précisent leurs relations avec les thèmes fondamentaux et persistants. La nature même de notre sujet va donc nous imposer une double tâche préliminaire :

Évoquer les problèmes de portée philosophique devant lesquels la pensée mathématique se trouvait placée au début de 1937 (et devant lesquels elle se trouve placée encore aujourd'hui), et décrire les courants les plus importants entre lesquels elle se trouvait (et se trouve encore) partagée.

Comme d'une toile de fond, nous avons besoin d'un panorama général des idées et des écoles, des problèmes et des doctrines. Ce paysage philosophique pourra nous servir de système de référence. S'il fallait se passer des moyens de comparaison et de coordination qu'il comportera tout naturellement, la production de 1937 et 1938 — nous le craignons — apparaîtrait bien morcelée, incohérente et même contradictoire.

D'ailleurs, qu'on ne s'attende pas à une description sans lacune, à une énumération sans omission. L'espace, le temps et les informations dont le

* Article publié dans *Philosophie — Chronique annuelle de l'Institut International de Collaboration Philosophique*, nº **837**, édité par Hermann, Paris (1939), p. 3-66.

commentateur a pu disposer représentaient autant de principes de choix et de limitation — sans parler de son propre point de vue qui ne saurait ne pas intervenir comme une catégorie normative *a priori*.

PREMIERE PARTIE

Les grands thèmes de la philosophie mathématique

Remarques

2. Il est vain de chercher à formuler un critère permettant de séparer nettement les questions que le mathématicien reconnaîtra comme siennes de celles qu'il abandonnera à la compétence du philosophe. S'il est des questions qui n'intéressent que le technicien, et d'autres qui ne préoccupent que le philosophe, il en existe d'autres encore sur lesquelles philosophes et techniciens se rencontrent. Et, d'ailleurs, ces deux types, qu'il est souvent commode d'opposer l'un à l'autre, existent-ils véritablement à l'état pur ? Toute réflexion critique sur la Mathématique ne présuppose-t-elle pas une connaissance authentique, c'est-à-dire une possession suffisante de la technique spécifique de cette discipline, que seule une pratique préalable peut assurer ? D'autre part, existe-t-il un seul mathématicien qui n'ait jamais levé les yeux de son travail pour songer à la Méthode et aux fondements des procédés mentaux qu'il met en œuvre ? Critique et technique se complètent et se conditionnent mutuellement à la façon, il est vrai, de deux principes antagonistes et pourtant inséparables. La technique ne développe toute sa force que si la critique est refoulée, inhibée; la critique commence au contraire par suspendre la validité inconditionnelle de la technique, pour la soumettre à l'examen renouvelé, à la «reconsidération». Le pur technicien et le pur philosophe ne sont donc que deux types abstraits, personnifiant deux tendances complémentaires de notre activité mentale.

D'ailleurs, le jeu alternatif de ces deux tendances peut être aperçu jusque dans l'exécution des actes les plus simples. L'attention est, certaines fois, toute tendue vers l'efficacité d'un geste habituel : cette attention exclut toute velléité de variation exploratrice. Mais le geste doit-il être systématiquement corrigé : l'attention se reporte sur son déroulement, qui peut être librement suspendu et modifié à volonté.

Ces deux moments concourent naturellement à l'exercice de toute activité organisée (qui n'est jamais un pur automatisme). Aussi n'y a-t-il rien d'étonnant à les retrouver en face l'un de l'autre dans le champ de la recherche mathématique. Ce qui peut cependant surprendre, c'est la méfiance et l'hostilité à peine cachées d'une grande partie des «techniciens» envers toute pensée qui ne satisfait pas d'avance aux conditions «d'exactitude» du raisonnement mathématique. Et c'est, d'autre part, l'idée dépréciée que se font certains« philosophes» de toute technicité. Non pas que l'on ne sache pas distinguer les raisons de cette réciproque incompréhension : on s'étonne plutôt qu'elles n'aient pas été depuis longtemps dévoilées et désarmées.

Ainsi donc, le «philosophique» et le «technique» apparaissent à la fois conjugués dans leur opposition et antagonistes dans leur inséparable liaison. Ni chacun pour soi, ni dans leurs relations réciproques, il ne peut être question de les définir exactement et définitivement. Ce qui est de l'un ou de l'autre ne s'arbitre pas une fois pour toutes, sur la foi de tels ou tels caractères déterminés : le partage se fait par un arbitrage vivant, mouvant, renouvelé. Dans cet arbitrage toujours à reprendre, les intentions qui animent la critique philosophique et l'activité technique se rajeunissent. La dialectique où elles s'affrontent reflète, par ses variations, les phases de cette compétition inépuisable, dans laquelle l'une et l'autre prennent une figure plus nette et plus assurée, dans laquelle les idées mêmes du philosophique et du technique se concèdent mutuellement une signification de plus en plus efficace et jamais achevée.

Il ne faut donc pas chercher à tracer une ligne immuable de démarcation entre les thèmes authentiquement philosophiques... et les autres. Certaines questions philosophiques sont, par exemple, susceptibles de devenir le centre d'une nouvelle activité technique (comme la théorie de la démonstration nous en offre un exemple actuel). Plus que par le sujet, c'est par l'intention que le caractère philosophique se marque. Or, en face d'une technique qui cherche à s'enfermer dans les limites d'une spécificité toujours mieux précisée, l'intention qui s'avère le plus simplement et le plus authentiquement philosophique, c'est celle de raccorder l'activité mathématique à toutes les formes de la connaissance objective.

CHAPITRE I

La Dialectique de la connaissance

3. Sous ce titre général, et dans une description sommaire qui ne veut et ne peut être ni exhaustive, ni définitive, nous allons distinguer trois grands thèmes que la pensée mathématique ne cesse de traiter, de plus en plus subtilement et de plus en plus efficacement. Les voici, formulés de façon un peu inhabituelle :

I. Les mathématiques en tant que *Dialectique de la sensation*.

II. Les mathématiques en tant que *Dialectique de nos conduites élémentaires*.

III. Les mathématiques en tant que *Dialectique de l'expérience systématique*.

1. La Dialectique de la sensation.

4. Ce n'est pas chose très simple de décrire le rôle des mathématiques que cette rubrique prétend saisir, parce qu'il chevauche plusieurs disciplines à la fois, allant de la logique à la physiologie. Aussi, plutôt que d'en parler immédiatement en termes généraux, allons-nous chercher tout d'abord à le distinguer dans une question typique : celle des rapports de l'«espace sensible» et de l'«espace géométrique».

C'est d'ailleurs un sujet aux multiples aspects. Et, depuis que la critique kantienne l'a authentiquement abordé par la question : «*Wie ist Geometrie überhaupt möglich ?*», d'innombrables essais lui ont été consacrés.

L'espace sensible, ou l'espace-représentation, c'est cette vision d'une étendue en largeur, hauteur et profondeur que tout homme normal transporte avec lui, dans laquelle les choses perçues viennent prendre place, en volume et couleur.

Le langage ordinaire, lorsqu'il prend pour objet le monde extérieur et nos «conduites» qui s'y rapportent, s'articule nécessairement sur un certain nombre de termes relatifs à cette «forme» de toute notre information naturelle. Certes, le nombre π n'y figure pas de lui-même, mais il s'y établit une série de relations «de pur bon sens» entre les idées du haut, du bas, du plus près et du plus loin, de la gauche et de la droite, de l'extérieur et de l'intérieur, pour ne citer que les exemples les plus simples. L'usage que nous faisons tout naturellement de ces idées représente déjà une dialectique de l'espace, très sommaire il est vrai — une dialectique de l'espace sensible.

Paul VALÉRY, dans *Variété I* [2], parlant de l'invention par les Grecs de la géométrie rationnelle, écrit :

«Songez à la subtilité et à la volonté qu'il leur a fallu pour accomplir l'ajustement si délicat, si *improbable*, du langage commun au raisonnement précis... comme ils ont bien réussi dans la correspondance nette de ces opérations [motrices et visuelles] avec les propriétés linguistiques et grammaticales. Ils se sont fiés à la parole et à ses combinaisons pour les conduire sûrement dans l'espace».

Plus justement encore, ne faudrait-il pas parler d'une extension des procédés du langage par la création de notions plus précises, telles que celles de point géométrique, de droite idéale et de cercle parfait, et par l'institution de règles très strictes dans la façon de les lier en phrases; par l'instauration d'un arbitrage très exigeant de leurs rapports réciproques; *par l'invention, en un mot, d'une nouvelle Dialectique de l'espace* dont les règles et les normes ne sont point d'ordre grammatical, mais sont inspirées par une contemplation attentive de la forme que prend en nous la sensation de l'espace, et par une prise de conscience de la structure de celle-ci ?

Sous sa forme «purement rationnelle», dominée par les notions d'intuition et d'évidence, la géométrie est donc moins directement une Dialectique de l'«espace physique», explorable par une expérimentation volontaire, qu'une *Dialectique de l'«espace-représentation», forme prédestinée de l'expérience sensible*.

5. Cependant, la question de l'espace n'est point épuisée par une analyse systématique de la structure des sensations. La sensation n'est qu'un des éléments informateurs de nos conduites, en face d'un monde extérieur portant le caractère du réel. Et c'est pourquoi l'analyse de la sensation doit se compléter d'un examen de sa valeur informatrice, non plus sous l'angle de la nécessité *a priori*, mais sous l'angle de la validité.

Dès ici, élargissons quelque peu la question. Notre conduite est informée à la fois par les signaux captés par nos organes sensoriels et par les états de certains dispositifs organiques (canaux semi-circulaires, par exemple) *où viennent s'inscrire les variations de notre propre système corporel*. Pour que ces signaux atteignent notre conscience sous leurs aspects différenciés de lieu, de couleur ou de son, par exemple; pour que les états des dispositifs organiques appropriés puissent être convertis en contributions au déroulement de telle ou telle action, *il faut qu'ils viennent se situer, se spécifier au sein de certains systèmes référentiels et coordinateurs, systèmes empiétant sur l'organique et sur le mental*. Ce sont ces systèmes qui sous-tendent la perception de l'espace étendu selon trois dimensions, dont il vient d'être question; qui organisent la vision colorée; qui nous assurent la maîtrise de notre équilibre et l'efficace coordination de nos mouvements...; qui président, en un mot, à nos relations naturelles avec le monde physique.

Ces systèmes organiques et mentaux, quant à leur destination, sont comparables à des tableaux établis au préalable, permettant d'interpréter le résultat de telle ou telle mesure. Leur existence équivaut à un certain ensemble de connaissances préliminaires, à certaines *«données primitives» de la connaissance*. Celles-ci ne sont que partiellement innées; on peut en observer l'acquisition progressive chez les petits enfants; même chez les adultes, elles ne sont pas absolument fixées. Certes, on peut les dire *a priori*, et par conséquent aussi *normatives* : mais seulement dans un sens assez relatif. *C'est à cet ordre de connaissances que nous appliquerons le qualificatif «intuitif»*.

Reprenant une expression kantienne célèbre, nous avons proposé le nom de *forme intuitive* pour toute «totalité mentale» — plus ou moins différenciée — *engendrant et arbitrant un champ de représentations*, c'est-à-dire un ensemble de représentations de même nature, mais variables avec un certain nombre de degrés de liberté. Telle de ces formes paraît répondre immédiatement au fonctionnement d'un organe sensoriel déterminé, comme la couleur répond à l'œil; d'autres paraissent répondre à une activité moins différenciée, comme la forme intuitive où se fonde la sensation du temps vécu.

Pour revenir à l'exemple de l'espace, la question qui nous occupe s'élargit et s'approfondit tout naturellement : c'est tout ce qui peut être su de la forme intuitive relative à l'espace qui doit être raccordé, d'une part à l'existence et à la structure de la géométrie rationnelle, d'autre part aux possibilités de peuplement d'un espace «réel» par des objets matériels.

Illustrons les remarques qui précèdent par les titres de quelques travaux qui s'y rapportent, pris d'ailleurs un peu au hasard :

Henri POINCARÉ : *L'espace sensible* [3].
Henri POINCARÉ : *Pourquoi l'espace a trois dimensions* [4].
Henri POINCARÉ : *L'espace et la géométrie* [5].
F. ENRIQUES : *Les données spatiales des sens et la genèse psychologique des concepts géométriques* [6].
L. BRUNSCHVICG : *Le peuplement de l'espace* [7].
H. WEYL : *Das Raumproblem* [8].
F. GONSETH : *Les formes intuitives* [9].

6. Le problème classique dont il vient d'être question et qui comporte de si nombreuses variantes doit uniquement, répétons-le, servir de modèle.

Il ne concerne qu'un aspect de la question des rapports de l'intuitif et du rationnel, mais un aspect particulièrement accessible et spécialement évocateur. Il prépare et préfigure plus ou moins fidèlement tous les problèmes où l'on prétend saisir et reproduire avec quelque exactitude le contenu, la structure d'une forme intuitive, ou de toute autre catégorie suffisamment séparable de connaissances intuitives.

L'exemple le plus complet et le plus frappant de la mathématisation d'une autre forme intuitive que celle de l'espace est fourni par la *théorie mathématique de la couleur*.

Pour illustrer ce thème célèbre rappelons le *cercle des couleurs* de NEWTON [10], la *pyramide des couleurs* de LAMBERT [11], la *Farbenlehre* de GOETHE [12], les *postulats* de GRASSMANN [13]; joignons-y quelques titres suggestifs :

H. V.HELMOLTZ : *Handbuch der physiologischen Optik* [14].
E. HERING : *Grundzüge der Lehre vom Lichtsinn* [15].
E. SCHRÖDINGER : *Grundlinien einer Farbenmetrik* [16].
J.F. SCHOUTEN : *Vierfarbentheorie* [17].

Et pour ne pas passer la mathématisation du son complètement sous silence, citons encore les *Elemente der Psychophysik* : de FECHNER [18] et, par exemple, le travail tout récent :

K.W. WAGNER : *Vorschlag zu einer praktischen Definition der Lautheit* [19].

7. C'est encore ici qu'il faut ranger les problèmes où l'on ne prétend pas expressément faire la théorie d'une sensation, ou élaborer la structure rationnelle d'un secteur plus ou moins déterminé de l'intuition, mais où l'on se propose d'apprécier le rôle que jouent certaines notions intuitives fondamentales dans l'édification de certaines théories à caractère mathématique.

L'exemple typique est ici celui de la *Cinématique*, par la façon dont on y fait intervenir les idées du temps, de la simultanéité et de la vitesse, par exemple.

C'est ici que viendraient se placer les études sur les rapports du temps intuitivement apprécié aux notions abstraites portant le même nom : le temps galiléen, le temps de la cinématique einsteinienne ou temps relatif, le temps local, etc.

C'est sous la. même rubrique, d'ailleurs, que l'on aurait déjà trouvé les discussions concernant la possibilité d'accorder notre intuition spatiale avec les espaces non-euclidiens.

Il est vrai qu'en citant la *Théorie de la relativité* nous quittons le domaine traditionnel des mathématiques pour nous engager dans la physique théorique. (La distinction entre mathématiques pures et physique théorique, surtout sous l'angle où nous les envisageons ici, est d'ailleurs purement traditionnelle). Nous touchons en outre au rôle des mathématiques qui fera l'objet de la rubrique III.

Ce qui devrait être rassemblé ici, c'est plus spécialement tout ce qui a trait aux rapports des notions intuitives, des formes intuitives, en un mot de toute espèce de connaissance intuitive, avec toute espèce de construction abstraite. *En particulier les difficiles questions concernant le raccordement des théories atomiques et quantiques à l'intuition macroscopique*.

Puisque l'occasion s'en présente d'elle-même, remarquons que la question générale dont nous parlons ici est celle même qui fait l'objet du *phénoménologisme* : *expliciter la structure de la sensation et des sensations*. Les moyens de l'explicitation y sont fournis par une dialectique *ad hoc* : façon de faire certainement légitime, à la condition de ne pas préjuger le possible. Le raisonnement géométrique, par exemple, réalise une dialectique de ce genre.

2. La Dialectique des conduites élémentaires.

8. Nous disions que les connaissances intuitives — dont le jeu dialectique s'établit en notre esprit sinon par la transmission héréditaire d'une structure complètement prédestinée, du moins par l'épanouissement d'une disposition héréditaire — nous disions que ces connaissances ont un caractère *normatif*. Ceci s'explique facilement : lorsqu'une information est liée à certains moyens d'information indispensables et irremplaçables, ces moyens entrent pour une part dans la forme même de l'information. La connaissance qui en dérive porte en elle-même les caractères systématiques, peut-être accidentels, des procédés informateurs *comme des lois de structure nécessaires a priori*. C'est pourquoi l'on peut dire, par exemple, que l'espace et le temps sont des formes *a priori* de toute connaissance du réel. *Toute autre connaissance intuitive est normative au même titre*. Le grand problème de la philosophie scientifique actuelle consiste précisément à tempérer ce caractère d'impérative nécessité, dans les conflits de compétence où l'expérimentation systématique se retourne contre l'intuition pour lui donner tort.

9. Dans l'examen très sommaire que nous faisons ici de nos moyens de connaître, il faut placer à côté des connaissances intuitives dont il vient d'être question d'autres connaissances qu'il faut également appeler *normatives*. Bien qu'on ne puisse dire qu'elles ne se rapportent aucunement au monde extérieur, elles ne concernent cependant pas directement tel ou tel complexe de sensations, ni tel ou tel groupe de comportements corporels. Elles tiennent à des *notions générales*, comme l'existence, l'identité, la différence, la permanence, la variation, l'unité, la diversité, la possibilité, la compatibilité, la nécessité, la chose, la cause, la correspondance, etc., etc.

Ces notions jouent, dans notre économie mentale, un rôle moins apparent que celui des représentations intuitives. C'est par comparaison avec ces dernières qu'elles peuvent le plus facilement être expliquées. Ce que l'espace sensible ou la forme intuitive de l'espace sont au groupe des déplacements dont nous sommes capables, ces idées le sont à certaines *conduites élémentaires*. Elles sont à la fois connaissances abstraites et moyens de nous insérer, adéquatement à nos fins, dans le déroulement des phénomènes et des actions étrangères.

Leur caractère normatif *a priori* se manifeste en ceci : *elles semblent apporter à certains jugements qu'elles informent et soutiennent une vérité inconditionnelle, une nécessité sans réserve, en dehors de tout souci de vérification*. En voici trois exemples, pris au hasard :

les mêmes causes entraînent les mêmes effets;

si je porte A qui porte B, je porte B;

deux groupes d'objets qui se correspondent un à un sont également nombreux, etc.

C'est l'organisation systématique de ces jugements, qui portent en eux-mêmes leur propre nécessité, du moins dans le cadre de la vie «ordinaire», qu'on pourrait appeler une *Dialectique de nos conduites élémentaires*. La logique traditionnelle en occupe un secteur, relatif spécialement aux notions d'être et de non-être, de vrai et de faux, d'individu et de classe. Les logiques modales en manifestent d'autres aspects.

Les notions dont il s'agit sont donc identiques, équivalentes ou comparables à celles qui servent en quelque sorte d'*enseignes* aux *catégories a priori de l'entende-*

ment. Et c'est pourquoi, pour la distinguer de la connaissance intuitive dont il vient d'être question, nous pourrions appeler *catégorique* (ou catégorielle) la connaissance que leur usage efficace présuppose.

10. Ici encore, la comparaison avec la connaissance intuitive est susceptible de nous suggérer les réserves nécessaires : comme les représentations intuitives, les notions catégoriques ne sont que partiellement innées; on peut observer un stade de l'intelligence enfantine où elles ne sont pas encore bien assurées. Même chez l'adulte on ne peut, sans arbitraire, prétendre qu'elles soient définitivement fixées : bien des indices témoignent du contraire. C'est précisément l'un des problèmes les plus délicats et les plus actuels de concilier, dans le cadre d'une théorie de la connaissance, leur caractère normatif *a priori* avec la possibilité d'un glissement de leur signification, sous la pression de l'expérience consciente.

Autant que par la connaissance intuitive, la pensée mathématique est informée dans toutes ses démarches par la connaissance catégorique. Elles sont ensemble les garantes des évidences où le mathématicien vient ancrer ses certitudes; ce sont les informatrices de l'intuition à laquelle il se fie.

Pour souligner l'analogie avec les problèmes relatifs à l'organisation systématique de la sensation, il convient de citer également un problème typique; ce sera, par exemple :

La logique formelle et la logique naturelle, ou bien la formalisation des jugements du sens commun.

11. Le problème des rapports de la logique, en tant que système conceptuel et verbal, à l'ensemble des connaissances catégoriques dans lesquelles elle se fonde, présente comme le problème des rapports de la géométrie rationnelle à la forme intuitive relative à l'espace, les aspects les plus divers, aspects allant de l'analyse grammaticale jusqu'à l'édification axiomatique d'une logique symbolique.

De quelque côté, d'ailleurs, qu'on l'envisage, on est toujours ramené à la question complémentaire (et fondamentale) suivante : *dans quelle mesure l'expérience confirme-t-elle ou infirme-t-elle la connaissance catégorique a priori ?*

Voici enfin, quelques titres d'essais traitant plus ou moins étroitement cette question modèle :

H. POINCARÉ : *Ce que doit être une classification* [20].
F. ENRIQUES : *Logique réelle et logique formelle* [21].
F. ORESTANO : *Logica del potenziamento e logica dei comportamenti* [68].
R. POIRIER : *De la pensée logique* [69].
E.C. TOLMAN : *An Operational Analysis of Demands* [22].
F. GONSETH : *La logique en tant que physique de l'objet quelconque* [23].

12. Tandis que, dans le cas de la connaissance intuitive, nous étions en mesure de mettre d'autres édifices rationnels en parallèle avec la «géométrie science abstraite», c'est seulement assez récemment que l'idée d'une formalisation méthodiquement

étendue à d'autres secteurs de la connaissance catégorique semble avoir été plus ou moins nettement conçue. *Observons pour terminer que c'est à l'idée d'une formalisation s'étendant progressivement à tout le domaine catégorique que répond la dénomination de «Dialectique des conduites élémentaires»*.

3. La Dialectique de l'expérience systématique.

13. Dans la classification sommaire de nos connaissances qui nous tient lieu de principe directeur, à la connaissance normative *a priori* dont il vient d'être question vient à la fois s'adjoindre et s'opposer la connaissance *a posteriori* gagnée par une *expérimentation systématique*. Quel rôle les Mathématiques jouent-elles dans l'organisation de celles-ci ? Comment. viennent-elles s'y insérer, y trouver prise et y faire valoir leur propre systématique ?

C'est ici que s'offre assez naturellement l'occasion de marquer — encore une fois très sommairement — l'endroit où deux grandes disciplines telles que les Mathématiques et la Physique se rejoignent et *à partir duquel leurs caractères essentiels se différencient*.

Le cadre traditionnel des mathématiques (et de la logique) est indéniablement celui de la connaissance normative a priori. Si le normatif pouvait être constitué à l'état pur, dégagé de toute gangue expérimentale, et s'il pouvait être posé et pensé à jamais identique à lui-même, on posséderait par là même un caractère méthodique opposant le rationnel à toute forme de connaissance acquise; un caractère méthodique convenant essentiellement aux mathématiques (et à la logique) *en face de toutes les autres disciplines scientifiques*. En plaçant l'opposition entre le normatif *a priori* et l'acquis *a posteriori* à la base même de nos premières distinctions, nous entendons marquer que cette opposition est une des données essentielles de toute analyse de la connaissance. Cependant, il faut se garder de faire de cette distinction sommaire et légitime un principe absolu, arbitraire et trompeur. L'arbitrage entre le normatif et l'expérimental est en devenir dans les consciences individuelles et dans la conscience collective à travers l'histoire. Rien ne nous autorise à préjuger une fois pour toutes de la dialectique par laquelle il s'exprime. Poser en absolu préalable telle ou telle forme sommairement adéquate de cette dialectique, c'est fausser par avance les conditions du problème. En fait, les grandes disciplines de l'esprit participent toutes plus ou moins les unes des autres; elles ne prennent leur spécificité que par l'affirmation de certains caractères et de certaines intentions qui ne sont nulle part complètement absents.

14. Un exemple typique fera mieux apercevoir la portée de ces observations. La question que voici : *Le groupe des déplacements de l'espace géométrique fournit-il une description adéquate des possibilités de localisation d'un corps matériel ?* aurait certainement pu être évoquée dans le cadre des connaissances intuitives, à la condition de ne pas faire appel à une technique des localisations dépassant les pratiques journalières dans le maniement des objets. Cette pratique est naturellement tout engagée elle-même dans la connaissance normative de l'espace et de l'«objet quelconque». De ce point de vue, soumettre ce maniement à une systématique rationnelle, ce n'est pas encore sortir de la *Dialectique de la sensation et des conduites élémentaires*.

15. On en sort, au contraire, si l'on érige en règle méthodique l'intention de tenir compte des renseignements fournis par les techniques expérimentales, même dans l'éventualité où ces renseignements ne s'accorderaient pas sans effort avec nos vues préalables. C'est la volonté d'instrumenter les phénomènes qui fait s'éloigner la spécificité de la Physique de celle des Mathématiques. Et cependant, cette volonté n'est point absente de la géométrie élémentaire. La pratique de la règle et du compas dépasse et prolonge instrumentalement nos facultés naturelles quant à la mesure et à la localisation des objets : *c'est un authentique chapitre de physique*.

Où tracer une ligne nette de démarcation ? Notre corps, nos membres et nos organes enregistreurs sont aussi des appareils susceptibles d'être éduqués et perfectionnés. Il n'y a pas de rupture entre le normatif et l'expérimental : ce dernier voit simplement s'épanouir en système une intention implicitement, mais essentiellement, comprise dans le premier.

Il y a d'ailleurs certains chapitres intermédiaires, tels que la Cinématique par exemple, que la tradition hésite à attribuer aux mathématiques dites pures plutôt qu'à la physique. En un mot, les caractères essentiels de toute physique peuvent être poursuivis et retrouvés jusque dans les lieux forts du rationnel, c'est-à-dire jusque dans les dialectiques normatives, sans que jamais le fil ne casse.

16. D'ailleurs, ce qui doit nous intéresser spécialement ici, c'est le phénomène inverse : c'est que l'expérimental ne peut pas, lui non plus, être réalisé à l'état pur. On peut également y poursuivre en sens opposé et y retrouver — et même sous diverses formes — l'intention mathématique par excellence : l'intention de reproduire le réel par des enchaînements soumis à une réalité interne, de traduire le phénomène par un déroulement autonome de schèmes mentaux, de tout ramener à un jeu réglé de symboles ou même de signes concrets : en un mot, *l'intention dialectique*.

Elle y intervient dans l'inévitable mise en jeu du normatif préformé, qui reste le truchement obligé de tout nouvel acquis. C'est le point de vue dit «de l'application des mathématiques pures». De ce point de vue, l'expérimentation systématique *applique* les règles de la logique, *applique* les procédés de l'arithmétique, *applique* la notion de fonction, *applique* l'analyse, la géométrie à *n* dimensions, etc., etc.

Ce point de vue n'est que très sommairement juste : la chose est maintenant, pensons-nous, suffisamment claire. L'intention dialectique se manifeste aussi par une fantaisie créatrice *sui generis* s'exerçant sur les thèmes originels; et pliant ceux-ci à des variations dont ils sortent souvent profondément modifiés. L'esprit y reprend une certaine liberté vis-à-vis de ses engagements primitifs : l'espace devient espace-temps, espace de configuration, extension en phase, etc. Certaines de ces variations, telles que la *Cinématique relativiste* ou la *Mécanique ondulatoire*, inaugurent des dialectiques imprévues où l'on prétend remanier les liaisons existant préalablement et normativement entre les notions de temps, d'extension, de substance.

L'intention dialectique est enfin évidente dans certaines tentatives théoriques qu'on qualifierait volontiers de *dialectiques ad hoc*, qui se portent résolument en dehors du normatif constitué. Nous pensons ici, par exemple, aux *Statistiques* de FERMI ou de BOSE-EINSTEIN, ou à la *Logique ad hoc de l'objet atomique* [86].

Même lorsque l'intention expérimentale prétend se rendre autonome, en déclarant par exemple : *La seule définition effective d'une notion physique, c'est, en définitive, l'ensemble des mesures par lesquelles elle entre efficacement dans ma sphère d'action*, l'intention dialectique est encore bien visible sous le travesti *behavioriste*.

17. En somme, le problème qui s'ouvre ici appartient à la philosophie des mathématiques aussi bien qu'à la philosophie de toute autre science. C'est *d'accrocher l'expérimental au normatif de façon cohérente, ce qui veut dire : dans le cadre d'une dialectique commune*. C'est finalement toujours ce problème que les oppositions verbales, telles que les suivantes, évoquent : rationnel et expérimental, absolu et relatif, nécessaire *a priori* et vérifié *a posteriori*, etc. C'est toujours la question fondamentale de l'*induction* et de la *déduction* qui est visée, c'est-à-dire celle de l'arbitrage entre le *normatif* et l'*expérimental*.

CHAPITRE II

La Méthode de la pensée mathématique

1. Observations préliminaires.

18. Si le premier grand thème de la philosophie mathématique est l'examen critique du moment mathématique dans la genèse, l'accroissement et l'organisation du système de nos connaissances, la mise en relation du savoir et de la technique du mathématicien avec toutes les techniques et tout le savoir — ce que nous avons enfermé dans la formule «*la Dialectique de la connaissance*» — le second grand thème est la saisie de cette dialectique dans ce qu'elle a de particulier; la recherche de ses caractères distinctifs; la poursuite de sa progressive autonomie; l'instauration de sa spécificité; *c'est, en un mot, le thème de la Méthode des sciences mathématiques*.

19. Sans presque jamais être nommé et le plus souvent sans être clairement aperçu, c'est le problème de la Méthode qui forme le fond commun des recherches et des discussions actuelles sur le fondement des mathématiques. L'intention philosophique et critique qui s'exprime dans ce problème semble avoir été longtemps refoulée, et peut-être oubliée, même dans les travaux prenant la «méthode axiomatique» ou la «méthode déductive» comme objet. Les expériences de ces dernières décades semblent cependant le ramener au premier plan : il est redevenu opportun de signaler que, mieux que toute autre, l'idée d'une méthode de la pensée mathématique permet de réunir dans une même perspective les tentatives allant de PLATON, par DESCARTES, LEIBNIZ et KANT, jusqu'aux modernes; que l'intention à laquelle elle répond cherche encore aujourd'hui à se réaliser; que le problème critique qui est aujourd'hui posé n'est que la variante actuelle d'un problème qui accompagne durablement l'expérience de la pensée.

Ce problème comporte des difficultés exceptionnelles : il importe d'en signaler quelques-unes avant de l'aborder.

20. Si l'on possédait un modèle authentique d'une *«Méthode pour diriger l'esprit» dans la pratique de quelque dialectique*, la critique de la «Méthode de la pensée mathématique» aurait des chances de pouvoir s'exercer à partir de ce point d'appui. Mais les caractères distinctifs, les exigences idéales d'une telle Méthode ne nous sont nulle part donnés d'avance, manifestés à l'état pur. Tout au contraire, c'est tout à la fois qu'il faut gagner progressivement : *ce qui fait le caractère méthodique d'une pratique et ce qui fait l'efficace d'une méthode*. Il n'y a pas de pratique sans quelque méthode, pas de méthode sans quelque pratique; mais ni les caractères de l'une, ni les exigences de l'autre ne sont complètement prédestinés : ce sont des conceptions de l'esprit, répondant à telles ou telles intentions, tenant compte de telles ou telles nécessités, que l'esprit est plus ou moins libre de retoucher et même d'abandonner. L'idée même de méthode se développe et se détermine au fur et à mesure que les techniques s'organisent et se différencient.

Passer outre à ce fait primordial, penser comme si la spécification du mathématique était chose définitivement accomplie, raisonner comme si l'autonomie du rationnel était complètement instaurée, c'est tout simplifier, tout éclairer d'un jour factice : c'est prendre la question à rebours.

Il en résulte que l'on ne saurait, sans arbitraire, sortir le problème de la méthode du cadre historique et génétique : l'esprit ne saurait être dispensé de sa tâche, qui est de partir d'images et d'idées sommaires pour en poursuivre la différenciation.

2. Le problème de l'évidence.

a) La méthode de l'évidence et de la nécessité inconditionnelles.

21. À la fois pour illustrer encore les singulières difficultés du problème et pour faire apparaître une première réalisation sommaire de l'idée de la méthode en mathématiques, arrêtons-nous au fait suivant : on observe, aussi bien dans le développement historique que dans la genèse mentale de l'activité mathématique, un stade où l'idée de démonstration n'est pas encore nettement présente. À ce niveau, un certain maniement du nombre et des notions géométriques les plus élémentaires est cependant possible. *Cette pratique rudimentaire fait-elle apparaître déjà quelque caractère méthodique ?*

Dans la perspective en quelque sorte externe où s'est effectuée tout à l'heure la discussion du premier grand thème, cette première et sommaire caractérisation se distingue sans effort : toutes les opérations effectuées et tous les jugements portés sont sous l'arbitrage de la connaissance normative. Dans la perspective interne de l'esprit occupé par le jeu des idées mathématiques, l'envers de la même trame est le suivant : c'est que, une fois effectuées, toutes les constatations de fait portent en elles leur propre évidence; tous les jugements, une fois formulés, apparaissent nécessaires; toutes les opérations. une fois conduites à leur conclusion, ne se prêtent plus à la conjecture.

22. Ce n'est pas ici le lieu d'expliquer pourquoi la mise en œuvre de la connaissance *a priori* s'accompagne du sentiment de la vérité en soi ou de la nécessité inconditionnelle. Ce que le passage de la perspective interne à la perspective externe ne peut cependant manquer de suggérer, c'est que toute atteinte au bien-fondé illimité de la connaissance *a priori* fera ricochet sur l'évidence et la nécessité des jugements normatifs. C'est en ce sens que les jugements *a priori* des mathématiques ne sont pas complètement en dehors des atteintes de l'expérimentation systématique.

Cependant, même si la pratique systématique des jugements d'évidence et des

jugements nécessaires *a priori* devait s'entourer d'un halo critique, elle ne cesserait pas pour cela de fournir le fond de toute pratique des mathématiques. Si donc nous ne touchons pas du premier coup un caractère définitivement éclairci de la méthode de la pensée mathématique en la qualifiant de *méthode de l'évidence et de la nécessité inconditionnelles* nous n'aurons jamais à douter que ce qualificatif soit sommairement juste.

23. Il ne faut pas modifier essentiellement ce climat pour rendre compte, par exemple, de la *méthode cartésienne*. Il suffit d'y ajouter quelques traits, d'ailleurs fort importants. L'organisation interne doit tout d'abord être complétée par l'intervention de «ces longues chaînes de raisons toutes simples et faciles» en lesquelles DESCARTES voyait se décomposer les démonstrations et qui sont les voies par lesquelles, d'un «mouvement continu», la certitude absolue passe des prémisses évidentes aux conclusions les plus lointaines. Chacune de ces raisons simples, qu'elle constate une équivalence ou une conséquence, reste sous l'arbitrage de la connaissance par évidence. Et, d'ailleurs, c'est encore sur la foi d'une règle normative que la certitude est censée descendre inaltérée les degrés de l'échelle des conséquences.

24. Cependant, pour ce qui concerne les progrès de l'idée de méthode, il serait injuste de ne pas relever les deux moments essentiels que voici, de l'essai cartésien :

a) l'énoncé des règles bien connues, auxquelles, selon DESCARTES, on peut se restreindre sans que la pensée n'aliène rien de son étendue ni de son pouvoir, représente un essai d'*explication des démarches que la pratique doit légitimement accueillir*;

b) ces règles sont à rapprocher des commentaires sur la vérité, sur les substances simples, sur la lumière naturelle de l'esprit, etc., etc., qui sont partie intégrante de la méthode, car ils apportent, sinon la justification des règles elles-mêmes, du moins *les raisons pour lesquelles elles ont été jugées suffisantes à elles seules*.

Nous nommons un système de vues de ce genre, dont le but est d'insérer la pratique d'une discipline de façon cohérente dans l'ensemble de nos activités (et qui tient lieu de théorie de la connaissance), *la doctrine préalable des vérités élémentaires de cette discipline*.

Le qualificatif *préalable* ne doit pas être pris à la lettre. La doctrine en question n'est préalable que dans la perspective méthodique, qui n'est jamais de toute première instance. En fait, les démarches efficaces de la discipline et la doctrine préalable qui met à nu les intentions originelles et qui explicite les ambiances informatrices sont en interaction continue. Elles prennent simultanément leur rôle et leur forme dans un ajustement réciproque.

25. En bref, les deux éléments complémentaires que nous venons de souligner : *a)* l'énumération des types de démarches permises ou prescrites, *b)* la doctrine préalable des vérités élémentaires, sont deux traits essentiels que, dès ici, il faut exiger de toute Méthode formulée.

Ces brèves remarques vont nous permettre de pousser une rapide pointe comparative jusque dans la pratique ordinaire des mathématiques d'aujourd'hui.

b) La dialectique du suffisant et de l'arbitraire.

26. Une des difficultés essentielles du thème de la Méthode consiste en ceci : que les caractères authentiques d'une Méthode des sciences mathématiques ne peuvent être aperçus que dans les démarches effectives des mathématiciens, mais que ces démarches doivent parfois être invoquées contre le mathématicien lui-même. La méthode dont il s'agit n'est pas uniquement la codification et l'explicitation de ce que le mathématicien fait et pense aujourd'hui; il ne s'agit pas simplement d'écrire un aperçu historique et critique du développement des mathématiques des anciens aux modernes. Ce qu'on demande, c'est une *Dialectique des démarches mathématiques dans le cadre général de l'activité de l'esprit en vue de la connaissance*. Or, pour celui qui vise à cette Dialectique, la première constatation qui s'impose est celle-ci : dans leur état actuel, les mathématiques n'en offrent pas une réalisation satisfaisante. Il ne faut donc juger les mathématiques et leurs pratiques actuelles que comme une esquisse de ce qu'elles devront devenir — et qui n'est point encore déterminé.

Dans une perspective suffisamment large, les exigences dont la recherche d'une Dialectique de ce genre s'accompagnent ne s'opposent pas à l'intention réalisatrice du mathématicien : elles ne s'en écartent que pour y revenir par un détour, avec une fidélité renouvelée. Mais, dans la perspective en quelque sorte journalière, le thème de la *Méthode à faire* et le thème de la *Méthode telle qu'elle est* s'opposent plus qu'ils ne s'allient.

En résumé, l'intention méthodique, l'intention de saisir les démarches mathématiques dans une dialectique *ad hoc doit refuser de se considérer comme engagée à fond, et définitivement, dans la forme actuelle de la pensée dite «exacte»*.

27. Un exemple typique de l'inertie des vues traditionnelles en regard des exigences méthodiques, c'est le phénomène historico-psychologique de la *permanence du climat de l'évidence*. Le «Calcul des limites» de CAUCHY-WEIERSTRASS va nous permettre de l'expliquer en quelques mots.

Les mathématiques d'aujourd'hui ont assez peu gardé le souvenir des doutes et des discussions passionnées dont la notion de l'infiniment petit fut l'objet pendant plus de deux siècles. À l'usage, cette notion se révélait d'une fécondité surprenante, mais sa dialectique se heurtait à de très nombreuses contradictions, symptômes du désaccord de cette dialectique avec elle-même et avec les vues alors courantes. Dans un climat normatif, tout insuccès prend aussitôt forme de paradoxe ou d'antinomie : le calcul infinitésimal en connut une vraie floraison.

Pourquoi n'en sommes-nous plus touchés ? Comment les antinomies ont-elles été résolues ? Elles ne l'ont point été, ou du moins pas dans les termes dans lesquels elles se posaient. CAUCHY abandonna simplement l'infiniment petit (ou plutôt la dialectique que ce mot suggère) et fit appel à des notions nouvelles : celle de l'arbitrairement petit ε, et celle du nombre entier suffisamment grand N, en particulier, formulant en même temps les règles de leur emploi. En d'autres termes, il créa un nouveau langage mathématique, la *Dialectique des N et des* ε, dont la syntaxe était plus subtile que celle de tous les langages connus.

28. La justification de ce nouveau langage peut-elle être faite *a priori* ? Pourquoi le penser ? La nouvelle dialectique est une réussite; l'esprit l'a acquise en s'aventurant en dehors du domaine que son intuition contrôlait sûrement : les innombrables «fausses démarches» dont elle fut payée en fournissent la preuve. Elle ne s'impose pas comme indispensable à un esprit non exercé. Il faut postuler son bien-fondé pour l'apprendre et pour l'expérimenter, quitte à réexaminer ensuite si elle se raccorde sans dommage aux normes inchangées.

La pratique de ce nouveau langage a nettoyé l'analyse moderne de tout paradoxe. Le but mathématique a donc été parfaitement atteint. Mais comment apprécier maintenant sa création du point de vue de la méthode ?

Remarquons tout d'abord que cette dialectique est transmissible. Elle peut être apprise : les définitions, les exemples typiques de ce qui est licite et aussi de ce qui est erroné, y suffisent. La première de nos deux exigences de tout à l'heure est remplie.

La seconde exigerait un remaniement de la doctrine préalable, car les nouvelles démarches n'étaient pas d'elles-mêmes sous l'arbitrage de l'évidence. L'esprit a révélé des facultés créatrices impossibles à méconnaître et que, pourtant, la doctrine de l'évidence pure passait sous silence. Une fois ce remaniement effectué, les positions originelles ne seraient pas complètement abandonnées, mais on ne les trouverait plus que sommairement exactes. En un mot : le climat de l'évidence pure se trouverait plus ou moins profondément troublé.

c) La permanence du climat de l'évidence.

29. Mais la mathématique traditionnelle s'est arrêtée à une autre solution : *elle interpréta l'unanimité intersubjective comme le signe d'une évidence et d'une nécessité en soi*. Elle assimila l'exercice des normes nouvelles, gagnées par une si longue et si pénible expérience, à l'emploi inconditionnel du normatif *a priori*. Cette façon de faire fixe d'ailleurs également une variété de doctrine préliminaire.

Le mathématicien peut justifier son renoncement à l'attitude critique par d'assez bonnes raisons, tant qu'il se trouve en possession d'une dialectique unanimement pratiquée et tant que l'exercice de celle-ci ne donne lieu à aucun paradoxe. «Dans ces conditions, dira-t-il, la pratique est à l'abri des divergences de vue sur la doctrine préalable. En tant que praticien, je ne me sens donc point engagé dans les problèmes critiques de l'évidence ou de la vérité».

Cette argumentation n'est plus convaincante lorsque la dialectique en question se prolonge en *une dialectique «à paradoxes»*, et qu'on ne sait pas «encapsuler» les paradoxes, c'est-à-dire indiquer et justifier les limitations à apporter au jeu dialectique pour ne pas les rencontrer. Rien ne prouve qu'une nouvelle réussite «à la CAUCHY» ne doive pas être préparée et méritée par un examen sérieux des problèmes critiques. C'est cependant la situation — nous devrons y revenir — dans laquelle les mathématiques se trouvent encore aujourd'hui.

30. Enfin, il est un cas où la permanence du climat de l'évidence apparaît elle-même comme le plus évident des «paradoxes méthodiques».

C'est lorsqu'on se propose d'attaquer le problème même de la méthode. Par quelque biais qu'on le prenne, fût-ce celui de la non-contradiction ou celui de la démonstration, ce sont alors les titres de la pensée mathématique à se dérouler dans l'inconditionnel, dans l'évident et dans l'absolu, qui sont mis en question. Où prendre le droit de poser en axiome de la connaissance qu'il doive exister un canton réservé où la pensée sache être infaillible ? C'est cependant poser un tel axiome que de définir *a priori* les mathématiques comme la partie exacte de la pensée, ou que de réclamer un privilège d'infaillibilité pour telle ou telle forme de «pensée exacte». Car, à ce moment, l'on doit précisément se demander ce que c'est qu'une pensée exacte, et ce que veut bien dire le mot : infaillible. Prétendre ici qu'on le sait bien, n'est-ce peut-être pas montrer qu'on ne sait pas assez clairement de quoi il s'agit ?

En bref, l'une des plus réelles difficultés du thème de la méthode (ou des fondements), c'est qu'il est traditionnellement baigné dans une atmosphère normative absolue. L'intention méthodique s'en trouve profondément contrariée, car sa réalisation semble précisément exiger une certaine atténuation des idées conjuguées de l'évidence et de la nécessité inconditionnelles, un certain assouplissement de notre engagement dans le normatif *a priori*.

3. Le problème du fondement.

a) Une distinction essentielle.

31. À quelles intentions, à quelles nécessités répond la volonté de fonder une discipline ? Il faut, avant de répondre, distinguer deux situations fort différentes :

a) la discipline à «fonder» s'exerce dans un climat normatif et ne se heurte à aucune antinomie;

b) ou bien il est de fait qu'elle engendre certains paradoxes qui n'ont pas pu être «normalement» réduits.

32. Dans le premier cas la discipline est fondée par son ancrage même dans le normatif. Il s'agira donc tout au plus de l'organiser et de la systématiser de façon

à prendre plus aisément conscience du jeu des règles et des normes. Fonder les mathématiques signifie donc : *faire valoir certaines exigences méthodiques*. Au fond, on fonde la discipline en l'expliquant.

Dans le second cas, le problème est beaucoup plus pressant. C'est encore d'une exigence méthodique qu'il s'agit, mais fondamentale : *rétablir avant tout la cohérence des démarches licites et de la dialectique*. C'est donc immédiatement la question des «moyens légitimes», c'est-à-dire la question entière de la méthode qui se profile derrière celle du fondement.

33. Revenons aux mathématiques : l'évidence et la nécessité inconditionnelles ont leurs antinomies, les unes externes, les autres internes.

Les antinomies externes apparaissent chaque fois que l'expérience systématique ne s'accorde pas avec notre information intuitive ou catégorique; par exemple, dans la confrontation des vues «atomiques» et des vues «macroscopiques». On ne saurait prétendre que le problème des fondements n'a pas à tenir compte de ces antinomies.

Cependant, ce sont les antinomies internes, celles que le jeu dialectique engendre par lui-même, que nous avons ici en vue. Le jeu dialectique n'est pas d'avance saturé : il est au contraire ouvert, en devenir. Il s'accompagne d'une constante création d'objets mentaux, nouveaux et imprévus, qu'il entraîne immédiatement dans son rythme. L'exercice dialectique est donc expérience interne, avec toutes les surprises, tous les aléas de la création-découverte. Ce serait un miracle de prédestination que jamais ce rythme ne se brisât.

b) La méthode déductive.

34. La mathématique grecque avait déjà connu un de ces moments où l'esprit reste déconcerté devant sa propre découverte, lorsqu'elle se heurta aux nombres irrationnels. La façon dont elle rétablit le jeu dialectique un instant inhibé fixe le type d'une certaine solution du problème *b)* de tout à l'heure.

Une antinomie ne manifeste pas seulement une inconséquence de la dialectique avec elle-même; elle résulte souvent d'une contradiction entre un fait nouveau et les vues courantes. Que celles-ci se défassent pour faire place à une nouvelle «doctrine préalable», et les antinomies se trouvent du même coup résorbées.

Or, c'est à la fois par une refonte des vérités élémentaires et par la conception d'une méthode correspondante que la pensée grecque put s'ouvrir à sa propre découverte. *Dans le cadre de la théorie platonicienne des idées, la méthode déductive instaura la liberté de filer la trame des vérités géométriques, à partir des axiomes dont la vérité était claire d'elle-même*. Réussite admirable où la critique et la technique connurent un équilibre trop tôt rompu. La pensée philosophique n'en garde-t-elle pas comme une nostalgie ? La réalisation d'EUCLIDE-PLATON reste le modèle de la solution du problème du fondement *par révision des vues élémentaires (de la doctrine préalable) et par instauration d'une méthode adéquate*.

35. On a maintes fois exposé comment le doute s'était attaché au V^e postulat d'EUCLIDE, dont l'évidence n'était pas suffisamment ressentie, comment il avait fini par atteindre tous les énoncés mis en tête de la déduction. Par un phénomène de permanence fréquent dans l'histoire des idées, leur nom d'axiomes leur resta, bien que ne répondant plus à la définition originelle.

Après l'édification déductive des géométries non-euclidiennes, voici comment les choses se présentèrent :

Soit E le postulat d'EUCLIDE et L le postulat de LOBATCHEFSKI. Ces postulats sont incompatibles, puisque E postule *une parallèle à toute droite par tout point qui n'est pas sur cette droite* et que L en postule *deux*.

Dans le cadre méthodique de PLATON-EUCLIDE, l'un des deux, au moins, serait faux, et inacceptable comme axiome. Si l'on prétend les admettre tous deux à égalité de titres, c'est donc qu'on ne les regarde pas comme des énoncés vrais ou faux en soi, mais comme des énoncés seulement possibles chacun pour soi. En pratique, le saut d'un point de vue à l'autre semble sans péril. Pour la géométrie euclidienne, la déduction s'exercera inchangée à partir des même énoncés; pour les géométries non-euclidiennes, seules quelques retouches seront nécessaires. Mais en fait, la méthode a changé d'assises. Jusqu'ici, elle informait l'édification univoque d'un seul système déductif auquel aucune évidence ni aucune nécessité géométriques n'étaient étrangères. Elle doit maintenant justifier la construction d'un certain nombre de systèmes déductifs étrangers les uns aux autres, à partir de certaines bases axiomatiques reconnues comme possibles, mais non nécessaires. Comment une même méthode pourrait-elle justifier des résultats aussi dissemblables ?

36. Cette argumentation toute simple a des conséquences incisives. Quiconque veut savoir faire une différence entre un jugement scientifiquement fondé et un jugement d'autorité ne doit-il pas se poser les questions suivantes :

S'il y a deux méthodes que l'on a pu tenir toutes deux pour nécessaires, c'est qu'il n'y a pas de méthode «implicite en soi», donc pas d'objectivité en soi de la pensée mathématique. C'est donc sur la foi d'une «méthode explicite» que cette pensée sera reconnaissable. Cette méthode, comment la fonder ?

S'il y a deux façons de raisonner qui ne sont pas identiques, comment les distinguer entre elles ?

On peut trouver étrange la paresse de l'esprit scientifique à réagir à ce dilemme : «Ou bien ta méthode est juste, ou bien tu expliqueras pourquoi tu la changes».

Pour quiconque ne veut pas être le prisonnier spirituel d'une discipline, toute variation de la méthode pose sans rémission le problème de la méthode.

37. Dans notre cas, les mutations de la doctrine préalable sautent aux yeux : elle ne s'ancre plus dans la dialectique du vrai et du faux, mais dans celle des possibles admis ou rejetés et de leurs éventuelles conséquences nécessaires ou impossibles. Ce n'est pas qu'on ait à récuser les jugements d'évidence : la méthode fait jouer

d'autres catégories *a priori*. L'évidence, au lieu de porter sur des constats de vérité ou de fausseté, va porter sur la compatibilité ou l'incompatibilité des cas éventuels. Le modèle de ces jugements étant d'ailleurs le principe dit de contradiction :

«*A est* et *A n'est pas* sont incompatibles».

Comment la déduction à partir de l'hypothétique pourrait-elle être maintenant fondée ?

38. Ici encore, une modification de la doctrine préalable, consciemment inspirée de l'alliance de la méthode déductive et de la théorie platonicienne des idées, pourrait recréer le climat convenable. On s'arrêterait, comme sur une position normative, à une doctrine reconnaissant à l'esprit la faculté de poser sans erreur les axiomes dans le monde des Possibles, et regardant la dialectique des éventualités comme une sûre procédure mentale. Cette méthode resterait encore totalement engagée dans la connaissance *a priori*.

39. L'évolution historique a omis cette solution. Ne l'eût-elle pas fait qu'elle n'eût pas pu effacer un nouveau fait antinomique : *le glissement des fondements au sein du normatif même*. Ce fait n'est-il pas en effet incompatible avec l'idée d'un fondement normatif ? Et de quel droit l'aurait-on ignoré ? Un moment critique fût entré dans l'idée de la méthode des mathématiques, que la pensée mathématique n'était pas prête à recevoir.

Il y avait une solution psychologiquement plus immédiate et qui convenait mieux à la préoccupation constante du technicien de sauvegarder l'unanimité de la pratique et de refouler toute interprétation subjective : *laisser la doctrine préalable dans l'indifférencié et tenir la déduction à partir d'une base axiomatique pour la méthode distinctive des mathématiques*. Ceci d'autant plus que la pratique de l'axiomatique commença par ne pas décevoir.

Conférer une valeur normative inconditionnelle à un procédé méthodique qui résout les antinomies en les ignorant, c'est-à-dire en s'accommodant de vues vagues et indifférenciées sur les points en contestation, c'est aussi une façon de ramener le délicat problème *b)* au problème *a)* essentiellement plus simple.

Primauté de l'efficace et vigilance de la critique, ce sont en fait — ce devraient être consciemment — les deux pôles de toute méthode du savoir objectif. Mais, dans notre cas, la critique est mise en veilleuse. *Fonder les mathématiques, ce sera simplement leur imprimer une structure déductive manifeste. Ce sera pour chaque discipline mathématique, de la géométrie à l'arithmétique et à la logique elle-même, découvrir une base axiomatique convenable et réédifier la théorie en veillant à n'y faire jamais intervenir que les suppositions axiomatiquement posées, donc seules légitimes*.

c) L'exigence de non-contradiction.

40. Du zèle même du mathématicien à remplir impeccablement ce programme, des difficultés nouvelles, imprévues, allaient surgir. Ce zèle devait porter sur deux points spécialement : sur l'aménagement des systèmes d'axiomes et sur l'explicitation des procédés déductifs.

Dans un climat normatif inconditionnel, tant que les axiomes de base sont à envisager comme des possibles *a priori*, la question de la non-contradiction n'a pas besoin d'être soulevée : il faut tenir pour évident que la déduction à partir des possibles compatibles ne peut pas engendrer d'incompatibles.

Cependant, un souci assez naturel d'économie exige qu'aucun axiome ne soit de trop; qu'aucun ne soit conséquence de tel groupe d'autres axiomes — en d'autres termes, que les axiomes soient *déductivement indépendants*. Voici la règle faisant autorité :

Soient J un axiome, H le groupe des autres axiomes du système, et enfin J* un axiome de «remplacement» incompatible avec J. Si, dans deux modèles adéquats, on peut apercevoir les réalisations de J et H dans l'un et de J* et H dans l'autre, c'est que J (et d'ailleurs aussi J*) ne peut être conséquence de H; par conséquent J en est indépendant.

Ce procédé de remplacement, allié au souci d'analyser les axiomes «complexes», d'affaiblir les axiomes «trop forts», de décomposer la base axiomatique en autant d'éléments indépendants que possibles, *éveille une fantaisie technique toute spéciale*.

Celle-ci met en parallèle avec les disciplines originelles des variations de ces disciplines susceptibles d'entrer en concurrence avec elles jusque dans leur signification, c'est-à-dire capables de satisfaire aux mêmes intentions.

Il n'y a plus une géométrie, une arithmétique, etc..., mais *des* géométries, arithmétiques. Les variations altèrent le caractère de nécessité inconditionnelle des disciplines primitives.

Ce procédé suggère l'idée d'un choix plus ou moins libre des axiomes. La connaissance de certains systèmes contradictoires éveille l'idée complémentaire d'un arbitrage nécessaire entre le libre foisonnement des systèmes axiomatiques et l'exigence de la non-contradiction.

41. Les conséquences de cette évolution technique deviennent révolutionnaires, lorsqu'elles se font sentir dans l'examen des procédés déductifs. Si l'on ne se trompe pas en regardant la méthode de la déduction à partir des axiomes comme la méthode même des sciences mathématiques, on ne saurait faire d'exception pour la logique : il faut aussi qu'elle soit fondée axiomatiquement.

Mais, du travail de l'axiomatisation, ce n'est plus la logique, mais des logiques qui reçoivent leur consécration. La fantaisie axiomatique trouve à s'exercer même ici. À leur tour les caractères de nécessité et d'univocité des procédés de la

déduction en sortent ébranlés.

L'esprit reprend une certaine liberté vis-à-vis de l'idée de conséquence nécessaire. Il ne verra plus de contradiction à imaginer différents modes de la filiation des idées, différentes techniques de la déduction, entrant en concurrence les unes avec les autres. Une logique déductive, ce sera simplement une dialectique quelconque de la filiation des idées, pourvu qu'elle ne soit pas contradictoire.

Ainsi, par une sorte de nécessité interne, le technicien se voit entraîné vers la question que ses efforts tendaient à éviter : *celle de la cohérence de sa dialectique, de la non-contradiction de ses procédés déductifs*. Par le fait même qu'elle se pose, cette question révèle un affaissement de la doctrine inexprimée du technicien; celle d'une pratique normative en soi. Il est vrai qu'il n'acceptera de voir cette question posée qu'avec l'espoir de retrouver une évidence rajeunie, grâce à laquelle il mettra une fois pour toutes sa pratique à l'abri des antinomies, et de la critique.

42. Le voici donc devant cette question incommode : *par quels moyens une discipline est-elle en mesure de se justifier elle-même ?* La discipline dont il s'agit fait d'ailleurs plus que d'incorporer le normatif, elle prétend l'expliciter. Elle prétend prescrire les formes même de toute pensée exacte. Elle ne peut donc avoir recours qu'à elle-même.

L'entreprise a-t-elle un sens ? Échappera-t-on à l'antinomie méthodologique suivante : l'exercice de toute discipline présuppose son bien-fondé. Si le bien fondé n'est pas acquis d'avance — s'il doit être lui-même justifié — c'est que l'exercice de la discipline est arbitraire, illégal. Envers elle-même la discipline est donc inefficace.

Il y a cependant une issue : c'est de renoncer à faire intervenir toute la discipline dans l'œuvre de justification et de ne faire appel, au contraire, qu'à *telles de ses parties qui se recommandent par une évidence spéciale*.

Dans la perspective technique, le problème du fondement revient donc à délimiter une zone privilégiée de l'évidence; à faire choix d'un certain nombre de procédés constructifs et déductifs jouissant des deux propriétés que voici :

a) leur évidence s'impose;

b) ils suffisent à eux-seuls pour la démonstration de la non-contradiction.

Notons ici la rentrée des évidences *a priori* que l'axiomatisation avait pour but d'écarter.

Mais il faut observer que cette rentrée n'équivaut pas au rétablissement du climat normatif originel. La décision d'engager le problème du fondement dans le sens qui vient d'être indiqué, la façon dont sera délimitée la zone privilégiée d'évidence et toutes les vues qui s'y rapportent représentent une nouvelle doctrine préalable, désormais inséparable de la pratique.

Distinguons deux variantes principales :

1º la première est celle du *rajeunissement des évidences par la formalisation;*

2º la seconde celle de la *réduction à une doctrine antérieure*.

d) La réduction a une doctrine antérieure.

43. Commençons par la seconde variante, qui se présente elle-même en deux sous-variantes : la réduction à la *logistique* et la réduction à la *théorie des ensembles*.

Comment la logistique peut-elle être «fondée» antérieurement aux mathématiques ? Pour le concevoir, il suffit de rappeler ce que l'on a dit à propos des mathématiques dans le climat de l'évidence. *La logique peut être fondée normativement dans le climat de son évidence spécifique, qui est celle du réalisme des classes*. Il est vrai que la dialectique informée par cette doctrine préalable se heurte aux antinomies logiques bien connues. Pour son compte, la logistique se trouve donc en face de la variante dangereuse *b)* du problème du fondement. Quelle méthode propose-t-elle pour rétablir la cohérence de sa dialectique ? Nous l'avons déjà dit., elle s'axiomatise.

Elle le fait dans des conditions difficiles, car ses axiomes ne sont pas seulement des énoncés possibles à mettre en tête du système déductif; il leur faut encore être adéquats à certaines démarches de la dialectique, et servir de modèle pour que celle-ci ne s'égare pas vers les antinomies. Même en ne retenant pas le fait que l'un au moins de ces axiomes (l'axiome de réductibilité) est contesté, comment expliquer que la mise en système déductif suffise pour répondre à ces multiples exigences ? La doctrine logistique n'y répond pas.

44. La réduction des énoncés mathématiques à des énoncés logistiques «équivalents» s'obtient par la définition explicite des termes mathématiques à l'aide de termes logistiques «adéquats».

Cette notion même de définition explicite n'est pas sans causer quelques embarras. D'autre part, toutes les difficiles questions relatives à la non-contradiction restent en suspens. Pour y remédier, reculant devant une reconsidération de ses moyens autonomes, la logistique se rallie plus ou moins étroitement au programme de la formalisation, dont il sera question dans un instant.

La méthode de la formalisation a sa propre doctrine fondamentale : il n'est pas certain qu'elle s'accorde avec le réalisme des classes. Tous ces éléments méthodologiques s'enchevêtrent : méthode bien confuse pour la discipline rationnelle par excellence.

45. La théorie des ensembles n'est pas mieux éclaircie dans son fondement. De même que la «Dialectique des N et des ε» avait réussi à surmonter les paradoxes qui rendaient peu sûrs les raisonnements sur les infiniment petits, on a pu croire tout d'abord que la théorie cantorienne des ensembles allait apporter une nouvelle dialectique de l'infini échappant aux paradoxes des «infiniment grands actuels». Bien que nouvelle et avertie par l'expérience de l'insuccès, elle participa «normalement» du caractère de vérité inconditionnelle des disciplines déjà fixées. D'autres antinomies ne devaient cependant pas tarder à se manifester.

Ainsi donc la théorie des ensembles se trouve aussi placée devant la variante *b)* du problème du fondement. Il faut qu'on retouche sa pratique et peut-être qu'on remanie les vues sur lesquelles elle est assise. Quel procédé d'assainissement a-t-on proposé ? Ici encore, une axiomatisation.

46. Il est temps de présenter une remarque de principe : une nette distinction entre les variantes *a)* et *b)* s'impose quant à la signification de l'axiomatisation. Si, dans la première variante, le rôle des axiomes reste assez clair, soit comme vérités évidentes, soit comme énoncés possibles, soit seulement comme points d'ancrage d'une dialectique unanime, aucune de ces interprétations ne convient plus à la variante *b)*.

Dans notre cas, par exemple, on incline à penser que c'est la définition naïve elle-même — c'est-à-dire la notion courante — de l'ensemble qu'il faut rendre responsable des paradoxes et non pas seulement telle faute de raisonnement. Dans ces conditions, l'idée que les axiomes énoncent des propriétés bien définies rattachées à cette notion est vide de sens.

Les axiomes prétendent aussi parler des ensembles. Ils n'en parleront pas exactement de la même façon que la dialectique pré-axiomatique — sans quoi ils n'éviteraient pas les antinomies. C'est donc que, sous le même mot, ils ont en vue une notion quelque peu différente. C'est donc que l'axiomatisation prétend suggérer une mutation des vues préliminaires : *elle inaugure un changement dans la doctrine préalable*.

L'ancienne et la nouvelle dialectiques ont ceci de commun : elles se rencontrent sur certaines «choses» données d'avance et que toutes deux appellent des ensembles, tel l'ensemble des nombres entiers. Ces choses sont des réalisations aussi bien de la nouvelle que de l'ancienne conception de l'ensemble.

Mais quelle doctrine préalable expliquera que, si les choses sont «ce qu'elles sont», certaines vérités qui les concernent puissent subir des variations; que la dialectique mathématique qui les prend pour objet puisse suivre un autre «cours nécessaire» ?

En particulier, ce n'est pas le fait qu'on ait qualifié d'axiomes les règles de ce nouveau langage qui les assurera à jamais contre toute mésaventure. Elles valent ce que vaut l'objet intellectuel qui les a engendrés. Comme pour la dialectique des N et des ε, leur justification, c'est le succès.

Nous voici bien loin d'avoir fondé ces règles dans un normatif *a priori* : fonder la théorie des ensembles, cela ne signifiait pas, à l'origine, la fonder dans une réussite dont il n'est pas sûr qu'elle soit durable. L'intention primitive réclamerait au moins une mise en évidence — une preuve — de la non-contradiction du nouveau langage.

Que sera-ce donc que prouver ? La poursuite de cette intention engage dès ici l'axiomatisation de la théorie des ensembles dans les voies de la formalisation. De toutes parts, les tentatives techniques convergent vers ce point. Va-t-il apporter la décision ?

e) La formalisation.

47. Pour se prêter à la déduction formalisée, les axiomes devront encore une fois changer de signification. En tête d'un système hypothético-déductif, les axiomes énoncent comme possibles certaines relations entre des éléments préalablement conçus. Ainsi l'axiome suivant : *Il n'y a qu'une droite* d *en relation d'incidence avec deux points déterminés* A *et* B (*c'est-à-dire : il n'y a qu'une droite passant par* A *et* B) affirme comme possible une relation connue d'avance (la relation d'incidence) entre des éléments de nature prédéterminée (les droites et les points). Pour concevoir la nouvelle fonction de l'axiome, on va demander de ne plus voir, sous les mots de droite et de point, que des éléments sans détermination préalable, de simples *formes d'existence*, et de n'envisager la relation d'incidence que comme une *relation de caractère encore indéterminé*. L'axiome énonce alors une exigence à remplir, à la fois par les éléments et par la relation.

La base axiomatique énonce toutes les exigences à remplir par toutes les classes d'éléments et par toutes les relations posées entre ces derniers. Les seules propriétés des éléments et des relations sont les conséquences de ces seules exigences.

C'est la variante de la *définition implicite à partir des formes logiques*. Le mot de définition ne doit cependant pas faire illusion : les procédés schématiques pour rendre une définition de ce genre effective sont loin d'être donnés d'avance.

À première vue, il ne semble guère que cette nouvelle façon d'interpréter les axiomes puisse apporter quelques gages inédits de sécurité. Tout au contraire, il semblerait que les jugements d'évidence dussent avoir moins de prise sur des éléments vides de signification et sur des relations encore informes que sur des objets dont les propriétés et la structure parlent à notre imagination. Cet essai ne va-t-il pas marcher à rebours ?

Mais la nouvelle interprétation n'est que le prélude d'une mesure hardie : on va abandonner le sens pour s'en remettre à la forme. Un élément vide de sens est adéquatement représentable par un symbole arbitraire pourvu qu'il soit reconnaissable, et une liaison encore informe par tel signe qu'on voudra. On va donc tenter de faire apparaître, d'expliciter un aspect formel, à la fois des axiomes et des opérations déductives et constructrices dont ils forment le point de départ. Cet aspect formel se traduira par certaines propriétés concrètes que posséderont tous les assemblages «significatifs» formés avec les signes des éléments et des relations, ces assemblages significatifs étant naturellement ceux qui sont capables d'être retraduits en un énoncé non-formalisé.

Ce procédé n'est pas neuf. Les mathématiques l'ont toujours pratiqué. Non seulement comme une simple transcription; mais comme une méthode de substituer à des évidences devenant malaisées à saisir l'évidence propre des symboles et de leurs règles d'emploi, une évidence renouvelée, rajeunie. Ce qui est neuf, cependant, c'est de vouloir pousser la formalisation jusqu'à cet extrême : que rien de ce qui rappellerait les significations originelles n'ait plus à intervenir dans le jeu réglé — et devenu autonome — des symboles.

Dans notre cas la transcription symbolique exigera :

a) une liste des signes acceptés, éventuellement les prescriptions pour la compléter;

b) les formules-axiomes, c'est-à-dire les agrégats de signes qui ont signification d'axiomes;

c) les règles énumérant les opérations permises sur les agrégats de symboles, transcription des démarches constructives et déductives du domaine originel;

d) la «forme» symbolique d'une contradiction.

Démontrer la non-contradiction, ce sera maintenant *faire voir* que les démarches n'aboutiront jamais à la formule de la contradiction *d)*. Mais comment le «faire voir» ? Les raisonnements qu'il faudra faire dans cette intention auront le caractère de raisonnements mathématiques normaux. Il faudra donc à nouveau circonscrire un domaine privilégié de l'évidence.

D'autre part, les manipulations avec les signes et les agrégats prévues au point *c)* seront bien en nombre fini, mais non en nombre limité une fois pour toutes. Comment les décrire effectivement ?

48. Deux attitudes assez différentes sont ici possibles :

A) On s'accordera sur quelque principe limitant plus ou moins arbitrairement le champ des constructions et des raisonnements mathématiques déjà pratiqués. Par exemple, on envisagera comme «faisant partie du système formalisateur» *les jugements portés sur des agrégats finis dont l'œil peut apercevoir toutes les parties immédiatement et sans exception, et peut-être aussi toutes les démarches récurrentes sur une portion finie de l'échelle des nombres entiers*.

À l'essai, cette méthode a mené à de tout autres résultats que ceux qu'on recherchait. Pour tous les formalismes essayés et qui avaient en vue plus qu'un tronçon de l'arithmétique, un fait a pu être techniquement mis hors de doute : *c'est que le formalisme est incapable, par ses propres moyens, de démontrer sa propre non-contradiction*. Dans cette voie le problème aboutit nettement à une impasse.

La position A) n'est pas de ce fait entièrement bloquée. On pourrait envisager de mettre une plus large part des moyens mathématiques déjà acquis par ailleurs «à la disposition» du formalisme (ou même seulement à la disposition, non de la dialectique interne du formalisme, mais de la dialectique sur le formalisme). Mais qui sera désormais l'arbitre du légitime ? L'intention de se retremper dans l'évidence, de retrouver le normatif, s'altère et se perd.

B) La seconde attitude consisterait à ne pas oublier que les axiomes-formules ont une signification; qu'ils doivent être le dessin reconnaissable de certaines démarches de l'esprit, ou d'opérations effectuables sur des objets quelconques, fût-ce sur des symboles — et que les formules déduites doivent être elles aussi capables d'une interprétation du même ordre.

Dans ces conditions, il semblerait assez naturel d'imaginer un *formalisme en devenir* dont les moyens (la dialectique interne) ne seraient pas limités une fois pour toutes, *mais s'accroîtraient, à l'acquisition de toute formule, de ce que cette formule a pour mission de signifier*.

Cette voie n'a pas été essayée. Elle exigerait d'ailleurs la. mise au point d'une doctrine préalable correspondante.

49. D'ailleurs, dans la variante de la définition à partir des formes vides, ce n'est plus le problème de la non-contradiction qui occupe le premier plan. À quoi servirait-il de déduire, même sans contradiction, si l'on ne pouvait satisfaire aux axiomes par des classes d'éléments et par des relations convenables ? La première des exigences que la nouvelle doctrine axiomatique engendre, c'est de fournir à l'esprit quelque modèle où il puisse apercevoir les exigences axiomatiques réalisées.

Et voici que, par ce biais, se pose la question de la genèse des ensembles abstraits finis et infinis. Au lieu d'aboutir, nous voici arrêtés par le problème de la construction des structures abstraites, dont les éléments n'ont d'autres propriétés que celles qui résultent de la manière dont ils s'insèrent dans ces structures. Problème que rien, jusqu'ici, n'a semblé préparer.

50. Singulier tour de force : la technique arrivant à se prouver à elle-même que le problème qu'elle s'est posé comporte un moment non-technique, un moment critique, inéliminable.

4. Le problème de la méthode.

a) La dialectique enrobante.

51. L'essai de trancher la question de la non-contradiction des mathématiques classiques (sans parler des domaines à dialectique antinomique) par la mise en œuvre d'une partie seulement de la technique mathématique *actuelle*, partie jouissant d'une évidence privilégiée, a échoué. Soit que la doctrine préalable présidant au choix du domaine privilégié ait été inadéquate; soit que l'idée d'une pareille réduction soit elle-même inadéquate. (La mise en œuvre de toute la technique présupposerait d'ailleurs le résultat à démontrer).

Le problème du fondement n'en subsiste pas moins sous la forme suivante : *imaginer une dialectique pratiquement cohérente couvrant le domaine classique et une partie au moins des domaines contestés*. De même qu'on prouve le mouvement en marchant, de même, peut-être, le problème sera-t-il résolu par une création adéquate. Pratiquée unanimement, et même si elle entraînait quelque mutation dans les vues sur «les vérités élémentaires», cette dialectique pourrait refaire un climat de l'évidence inconditionnelle. *Comme fond commun à la méditation sur l'évolution de la pensée mathématique, sur les expériences présentes et sur les exigences insatisfaites, se pose cependant le problème critique de la Méthode.*

52. Une remarque, tout d'abord : on sait distinguer entre l'intention circonstanciée d'une action et l'exécution de celle-ci. Il faut, de même, distinguer entre la Méthode comme système conceptuel et la méthode comme façon de faire. C'est dans la première acception, et même plutôt dans le sens de Loi écrite que la Méthode doit ici être comprise.

Pour engager la discussion à fond, il faut le concours du vocabulaire usuel et d'une dialectique arbitrant le jeu des associations verbales. Comme cette discussion est, en fait, ouverte dès le début de cet exposé, cette dialectique ne peut être que la dialectique pratiquée ici-même. Est-ce la dialectique traditionnelle en ces matières ? Nullement !

Dans le climat de la connaissance scientifique actuelle, la dialectique traditionnelle de la critique philosophique est antinomique.

Aussi bien les dialectiques d'inspiration idéaliste que les dialectiques d'inspiration réaliste cherchent leur appui dans un normatif absolu, de l'existence ou de la nécessité. Elles voient la connaissance s'élevant prédicativement à partir de ces bases. Le moment décisif du problème de la connaissance est, pour elles, celui du fondement, imaginé définitif. La tentative technique de fonder les Mathématiques dont il vient d'être question est issue du même esprit.

Or, le savoir objectif, le savoir des sciences abstraites aussi bien que celui des sciences naturelles — nous l'avons vu ! — doit s'accommoder d'un normatif fuyant qui se défait et se refait en des mutations que la pratique adopte sans presque y prendre garde. *Là est le divorce de la philosophie traditionnelle et de la pensée scientifique*.

La critique qui veut rejoindre le savoir de notre temps se trouve elle-même placée, quant à sa propre dialectique, devant la variante *b)* du problème du fondement, de son propre fondement. Il lui faut — comme nous avons vu la géométrie le faire — s'engager dans un nouvel arbitrage de ses vérités élémentaires. Sa doctrine préliminaire s'en trouvera modifiée; le sentiment du normatif auquel elle se fie se déplacera : *en accepter la possibilité doit être le premier point de sa doctrine des vérités élémentaires*.

53. Elle n'a d'ailleurs qu'à ouvrir les yeux sur la pratique courante et cohérente d'une dialectique qui peut, sur ce point, lui servir de modèle : l'arbitrage qu'opère la science entre les théories qui se relaient dans l'interprétation d'un même phénomène. À l'ombre de la théorie nouvelle, la théorie qui s'en va reste valable d'une vérité sommaire, approximative. En principe, toute vérité qu'on atteint n'est que sommaire, la précédente préparant, préfigurant la suivante.

Le savoir scientifique n'est point un édifice conceptuel prédicatif. Les acquisitions nouvelles obligent constamment à réviser les vues courantes, jusque dans les vérités les plus élémentaires. Cette plasticité de l'édifice mental est la condition même de la permanence, de l'efficience pratique. *Pour que l'objectivité persiste, c'est le normatif a priori qui cède*. La dialectique de la science n'est ni close, ni immuable. Elle est en constant remaniement.

Le moyen, pour la critique, de se tourner vers le savoir d'aujourd'hui sans renoncer à se servir des usages verbaux engagés dans des dialectiques inadéquates, c'est d'avoir la liberté d'envisager ces dernières comme des essais à retoucher, dans un mouvant arbitrage entre la nécessité de maintenir les normes et la nécessité d'en changer. Liberté démontrée par le fait.

Voici donc les deux principes essentiels de la dialectique pratiquée par l'auteur (de la dialectique *idonéiste*), pour autant qu'il s'agit de sa propre pensée :

a) En principe, toute vérité est sommaire; toute idée en devenir; toute position révisable.

b) La connaissance objective et la dialectique correspondante ne se constituent pas par une organisation à partir de positions normatives immuables, *mais par une réorganisation à partir du front de l'expérience, allant jusqu'à la réinterprétation des données immédiates*.

Pris comme postulats à observer, ces deux principes sont capables d'incliner les dialectiques traditionnelles vers un nouvel arbitrage. Cependant, étant donné le climat normatif dont chacune de ces dialectiques s'entoure avec exclusivité, la seule manière possible de les surmonter toutes *en les faisant toutes entrer comme «réalisations antérieures et sommaires» dans un même cadre méthodique*, semble être celle du fait accompli. Rien ne peut dispenser de repenser, selon le nouveau mode, les thèmes persistants de la théorie de la connaissance.

b) Qu'est-ce que la méthode ?

54. La pierre de touche de la nouvelle dialectique, ce doit être naturellement le groupe des disciplines qui ont donné naissance à l'idée du savoir prédicatif, qui incorporent l'idée du normatif inconditionnel, les mathématiques et la logique. Ainsi, l'esquisse d'une Méthode de ces disciplines doit être à la fois l'aboutissement des recherches sur le fondement et l'épreuve de la nouvelle dialectique.

Qu'est-ce que la méthode d'une discipline organisée en vue de la connaissance ?

De même que la Géométrie est à la fois théorie et dialectique de l'espace sensible, la *Méthode est à la fois théorie et dialectique de la discipline qu'elle vise*.

55. Cette comparaison va porter un instant la réflexion. Encore une fois — une dernière fois — la doctrine préalable des vérités géométriques élémentaires va se transformer. Dans une interprétation qui prétend tenir compte aussi des antinomies externes issues d'une connaissance plus approfondie de la substance, les notions fondamentales (le point, la droite, l'incidence, etc.) sont à regarder comme des formes mentales adéquates, mais d'une adéquation seulement schématique et sommaire, à certaines réalités du monde physique. Et les axiomes transposent également en des liaisons abstraites et schématiquement efficaces telles ou telles liaisons aperçues dans le monde phénoménal.

En tant que théorie de l'espace réel, la géométrie est une structure abstraite schématique, imaginée à propos d'une *réalité extérieure correspondante* — réalité qui n'est d'ailleurs pas donnée en soi.

Cette façon de voir entraîne des conséquences incisives pour toute espèce de connaissance. L'axiomatisation devient le modèle (lui-même schématique) d'un procédé *sui generis* de connaissance : *l'abstraction par schématisation*. Toute image mentale, toute idée, tout concept peut être regardé comme l'aboutissement d'une active schématisation analogue.

Ces vues préalables sur la connaissance en général doivent être mises à l'épreuve dans les autres domaines axiomatisables (arithmétique, logique, etc.). Elles doivent être confrontées avec les informations de la psychologie expérimentale et génétique. Elles semblent adéquates aux faits (sommairement et schématiquement, elles aussi).

56. Revenons à la Méthode. Pour entrer en possession de la Méthode ou de la Théorie d'une discipline, il faut tout d'abord, de façon analogue, concevoir dans un raccourci, efficace, bien que sommaire, les activités et les démarches qu'on *dira caractéristiques*. La spécificité d'une discipline n'est pas donnée *a priori* : *il faut la construire mentalement*. Cette remarque vaut doublement pour une discipline en état d'extension : l'idée qu'on s'en fait est susceptible d'orienter son devenir.

Dans notre cas, il faut savoir abstraire de la pratique le type d'une démarche créatrice qui, une fois accomplie, nous laisse en possession de notions mathématiques encore engagées dans l'intégrité du rôle qu'elles ont à jouer; d'idées adéquates à leur destination. Or, *cette démarche typique, nous venons précisément de l'imaginer : c'est l'abstraction par schématisation*.

57. Il faut la compléter de la démarche inverse, du retour des abstraits schématiques vers un rôle concret, *de leur réalisation*. *Une réalisation par des signes choisis ou créés ad hoc est une formalisation*. Abstraction schématisante et réalisation formalisante sont les deux temps du rythme mathématique. Ce sont les deux premiers éléments de la Méthode des mathématiques. Sont-ils capables d'unifier le rôle des mathématiques dans l'acquisition de la connaissance, d'éclairer leur développement historique, et surtout de rétablir quelques vues simples concernant la question du fondement, laissée dans un état assez chaotique ?

Ces points sont décisifs. Ils vont être examinés.

58. L'explication axiomatique des domaines des mathématiques que nous avons vus engagés dans la connaissance du monde extérieur, soit sous la forme de la Dialectique de la sensation, soit sous la forme de la Dialectique de l'objet quelconque ou de la Dialectique de nos conduites élémentaires, soit enfin sous la forme de la Dialectique de l'expérience systématique, peut être facilement pliée aux *exigences de la dialectique du sommaire* : bien plus, la faculté de pouvoir regarder les constructions rationnelles comme des schémas dont seule la convenance sommaire est exigée, pourvu que l'efficience reste assurée entre certaines limites, met précisément le rationnel à l'abri de ce que nous avons appelé les *antinomies externes*.

D'autre part, l'idée de «forme schématique de la connaissance» peut être étendue à la connaissance *a priori*, qu'elle soit intuitive ou catégorique. Par là se trouvent conciliés deux traits de la connaissance par évidence qui paraissaient contradictoires dans le climat de la vérité inconditionnelle. En tant qu'exprimant une information sommaire, les jugements intuitifs ne perdent pas leur caractère normatif quant aux évidences de leur sphère originelle d'information. Ils n'en sont pas moins mis en suspens pour toute extension de la connaissance capable de révéler un aspect nouveau. Ainsi s'explique le caractère à la fois nécessaire et parfois trompeur de l'évidence. Ainsi se résolvent tout naturellement les antinomies de l'évidence.

En bref, l'abstraction par schématisation rend compte de façon uniforme de l'engagement des mathématiques dans la connaissance extérieure.

59. Tant que la connaissance ne dépasse pas les limites où les jugements *a priori* ne rencontrent aucune antinomie, il n'y a aucune différence à faire entre *schématiquement normatif* et *inconditionnellement normatif* : *la dialectique du sommaire se réduit à une dialectique idéaliste*.

Tant que la convenance d'un concept à sa réalité extérieure n'est pas invoquée en dehors de sa sphère originelle d'efficience, il n'y a pas de différence à faire entre *sommairement adéquat* et *parfaitement adéquat*. *La dialectique du sommaire se réduit à une dialectique réaliste*.

Dès lors, il n'est pas difficile de comprendre que la Méthode dont il est maintenant question puisse accepter tous les essais antérieurs comme des modèles préparatoires et plus ou moins approximatifs de ce qu'elle tente elle-même de réaliser. Elle peut ne renier ni la méthode axiomatique de PLATON-EUCLIDE, ni le climat normatif des mathématiques classiques, ni le réalisme des classes de la logistique, ni la doctrine existentielle de la théorie des ensembles; elle n'a qu'à les interpréter en fonction des aspects, allant du douteux jusqu'au nécessaire, que le sommaire peut revêtir.

En bref : la Méthode dont nous parlons comporte une *échelle historique* dont l'esprit est capable de descendre ou de remonter les degrés, pour réintégrer dans une validité sommairement retrouvée les positions méthodiques menacées ou abandonnées.

c) La dialectisation de l'expérience mathématique.

60. Le troisième point à examiner est le suivant : les deux conceptions complémentaires de l'abstraction schématisante et de la réalisation formalisante sont-elles capables d'apporter quelque clarté dans le problème du fondement ?

Une remarque est à faire : la méthode d'une discipline qui expérimente encore les moyens d'une extension non-contradictoire ne s'impose pas avec évidence; car, dans ce cas, il n'y aurait ni doute, ni hésitation sur le bien-fondé des démarches à pratiquer. *La méthode d'une telle discipline est encore à faire ou à parfaire*.

Cette remarque domine la question du fondement. En mathématiques, la réflexion sur la méthode est obnubilée par la fiction d'une pratique normative invariable. Pour s'apercevoir que nulle part une méthode authentique n'y est formulée, il faut une expérience qui rende un sens actuel aux questions fondamentales, telles que celles-ci :

Qu'est-ce que la création d'un concept abstrait ?

Qu'est-ce qu'une définition, une construction, une déduction, une démonstration ?

Cette expérience, la recherche sur les fondements est précisément en train de la faire.

61. Il apparaît tout d'abord que l'axiomatisation d'une discipline ne saurait avoir pour effet de fonder celle-ci sur un certain nombre de termes primitifs et de relations primitives donnés antérieurement et qui n'ont pas besoin d'être expliqués. L'épithète «terme primitif», accolée à certains mots, ne suffit pas pour garantir que l'idée de «terme primitif antérieurement déterminé» ne soit pas illusoire.

Supposer que le sens des mots puisse être posé ne varietur avant leur emploi, c'est faire une hypothèse illégitime sur la connaissance et sur l'activité de l'esprit : l'histoire des mots, même celle du mot «axiome», même celle du mot «relation», témoigne contre cette supposition.

Le problème du fondement des mathématiques sur des données antérieures ne varietur est un faux problème.

Ce qui est bien visible, c'est que toute axiomatisation engage les termes primitifs dans une dialectique soumise à l'arbitrage des axiomes. Devant renoncer à trouver l'information de cet arbitrage dans les significations complètement prédéterminées, l'esprit se retourne vers la position en quelque sorte opposée : la signification des mots ne réside pas en eux de façon prédestinée; elle leur vient finalement de ce que nous savons en faire. Le sens des termes primitifs leur viendra donc de la façon même dont la dialectique axiomatique s'en servira.

Cette façon de dire ne règle pas le problème. Elle ne fait que donner une orientation différente à la pensée. Mais l'on ne se trouve pas encore dispensé de la tâche essentielle qui est de concevoir les modalités de l'arbitrage axiomatique.

Dans l'axiomatisation ordinaire (à la façon d'EUCLIDE) de la géométrie élémentaire, la dialectique de l'espace représente un accord, un compromis entre deux moments essentiels : le moment intuitif représentant l'information antérieure des axiomes et le moment déductif représentant un apport autonome de l'esprit, bien qu'informé lui-même par la connaissance catégorique *a priori*. Mais comment savoir ce qui est de l'un et ce qui est de l'autre avec précision ?

62. À cet endroit intervient une réponse fondamentale : *à ce niveau, c'est-à-dire en avant d'une connaissance plus différenciée restant à concevoir à partir de celle-ci,* *la dialectique axiomatique est la forme même du savoir que l'on demande*. Elle est le modèle du procédé par lequel le partage et l'accord d'un donné antérieur et d'un moment organisateur de celui-ci est effectuable. Elle est à la fois moyen de connaître et forme de cette connaissance : moyen d'ailleurs sommaire et forme schématique.

À ce niveau, cette réponse règle la question du fondement de la géométrie élémentaire.

63. Nous avons dit «à ce niveau», car la connaissance ne peut être arrêtée à un niveau déterminé. Une connaissance plus circonstanciée, plus différenciée n'est exclue ni du côté de l'information externe ni du côté interne ni quant à leur rencontre dans la dialectique. Mais pour que cette connaissance nouvelle soit, il faut trouver, concevoir les moyens et la forme de son explicitation. Comme la connaissance de l'espace au niveau dont nous parlions, cette connaissance a ses modalités. Celles que le problème du fondement au sens étroit réclame concernent spécialement l'organisation de la dialectique, le moment déductif.

À la demande d'explicitation ainsi formulée, la Théorie de la démonstration répond, en style mathématique, par l'organisation d'une dialectique du signe. Cette réponse peut être appréciée d'un double point de vue :

a) du strict point de vue du problème du fondement;

b) du point de vue plus large du problème de la méthode.

a) La formalisation n'est, nous l'avons expliqué, que le signe d'une axiomatisation schématisante accomplie. Celle-ci institue une dialectique de la déduction; pour ne point sortir de l'exemple de la dialectique de l'espace, cette dernière représente le moment externe, dans lequel un nouveau moment organisateur vient insérer les règles du maniement des signes.

Ici se place la variante, adéquate aux nouvelles circonstances, de la réponse que nous venons de nommer fondamentale : la théorie de la démonstration est la forme même (à la fois moyen et modèle) de l'information plus différenciée sur l'organisation déductive d'une discipline.

À ce titre, même si elle n'est pas unique en son genre, même si elle ne remplit pas son dessein primitif, la non-contradiction, elle constitue, à son niveau, une réponse authentique à la question des fondements.

b) Puisqu'elle révèle l'une des voies par lesquelles l'idée encore indifférenciée de conséquence nécessaire peut être menée vers une conception plus différenciée de la démonstration, toute théorie axiomatisante (ou formalisante) de la démonstration est une contribution directe à la Méthode.

64. De façon générale, toute saisie par l'esprit d'un ensemble de connaissances comporte une explicitation des caractères par lesquels l'esprit s'en empare, et par conséquent une abstraction plus ou moins schématisante; et l'introduction d'une dialectique *ad hoc*, si l'esprit s'en sert.

Il ne faut donc point s'étonner de rencontrer dans toute axiomatisation, aussi bien dans celle de la logique et de l'arithmétique que dans celle de la mécanique, par exemple, les caractères que nous venons de rencontrer dans l'axiomatisation de la géométrie et dans la théorie de la déduction. Chacune de ces axiomatisations peut être également jugée d'un double point de vue :

a) en tant que modèle de l'information spécifique (relativement à un certain niveau), elle fonde la discipline (en principe de façon révisable);

b) en tant que révélatrice d'un progrès qui lui est lié de quelque idée primitive, elle engendre la méthode.

C'est ainsi que certains travaux récents sur l'axiomatisation-formalisation de l'arithmétique semblent mener à une spécification plus explicite de l'idée même d'arithmétique; d'autres sur l'axiomatisation de la théorie des ensembles à une spécification de l'idée d'ensemble, etc.

65. Comme nous l'indiquions plus haut, toute axiomatisation (et toute formalisation) doit s'accompagner de l'institution d'une dialectique *ad hoc* : celle qui établit les filiations à partir des bases axiomatiques ou des configurations symboliques de départ. *À toute dialectique que l'on saisit par ces procédés pour en dégager quelque aspect formel, quelque structure, vient ainsi s'adjoindre une métadialectique*. Nous terminerons par quelques remarques sur les rapports entre une discipline dialectisée et ses éventuelles métadialectiques.

66. Que devient dans cette forge de l'abstraction l'espoir qui animait les premiers essais sur le problème du fondement ? C'était, au fond, l'espoir d'aboutir à quelque *métadialectique de robot*, se réduisant à l'exercice de quelques procédés complètement explicitables. Or, certains résultats de CHURCH, sur le problème de la décision, font voir qu'il ne saurait se réaliser.

Le problème du fondement par la réduction à un behaviorisme de robot est un faux problème.

Tout compte fait, le résultat est assez clair : *la Méthode des Mathématiques se manifeste dans la saisie et l'organisation dialectique de la connaissance*.

Elle est préfigurée dans la structure de la connaissance intuitive et catégorique qui informe la saisie des évidences.

Elle s'organise dans son devenir et se différencie par la saisie dialectique de sa propre expérience — par l'intervention dans les systèmes dialectisés d'un arbitrage métadialectique dont la formalisation n'est que le signe.

Remarquons, pour finir, que la métadialectique peut être fournie par la dialectique elle-même dans son intégrité : celle-ci, ayant progressé de ses démarches élémentaires vers des démarches de plus en plus complexes, saura ressaisir dialectiquement ces dernières par ses propres démarches élémentaires, indéfiniment.

Ajoutons que la métadialectique pourrait être étrangère à la dialectique ou lui être subordonnée.

Mais qu'il n'y a aucun sens méthodique à supposer que la dialectique soit, au contraire, subordonnée à la métadialectique.

DEUXIEME PARTIE

Courants actuels

1. Introduction.

67. Avant de passer en revue les courants actuels de la philosophie mathématique et les problèmes de l'heure, quelques remarques nous paraissent nécessaires.

Qu'il soit tout d'abord bien entendu qu'il ne s'agit encore que d'une orientation à grands traits qui négligera bien des choses, soit consciemment, soit involontairement. Le commentaire détaillé des années 1937-1938 viendra prochainement apporter les compléments indispensables.

Observons ensuite que, si les grands thèmes dont il vient d'être question ne cessent de former le fond de toutes les préoccupations de la philosophie mathématique, les discussions s'attardent souvent autour de questions particulières d'un intérêt plus technique. C'est que, si le mathématicien se met à philosopher, il ne le fait en général pas gratuitement. Le plus souvent, il n'a pas cherché les problèmes de la connaissance : il les a rencontrés au détour de quelque difficulté de son métier. Il en résulte d'ailleurs que, par un retournement de perspective, il semble avoir choisi, dans sa discipline, les problèmes dont la solution intéresse toute la connaissance.

Ainsi s'explique l'intérêt durable ou subit de certaines questions qui sembleraient, à première vue, devoir être réservées au technicien, telles que l'axiomatisation détaillée de la logistique par exemple, ou la validité de l'axiome du choix en théorie des ensembles.

Une autre remarque, c'est que le thème concernant l'engagement des mathématiques dans le monde phénoménal semble retenir moins l'attention. Il ne faut pas s'en étonner : les problèmes de la connaissance qui se posaient à propos des géométries non-euclidiennes se posent aujourd'hui, sous une forme beaucoup plus pressante et beaucoup plus frappante, dans la physique, à propos de quanta, de causalité et de probabilités. Il est naturel que la pensée philosophique s'y porte de préférence. Il importe cependant de ne pas oublier que, dans l'essentiel, les mêmes problèmes se retrouvent partout, même dans l'examen critique de la formalisation.

Remarquons enfin que l'expression «la philosophie mathématique actuelle» est une expression dont le sens est bien difficile à préciser. Aujourd'hui, comme hier, les positions philosophiques antérieures sont encore activement maintenues. Lorsque le regard de l'esprit passe de doctrine en doctrine, il ne les voit pas seulement dispersées géographiquement, ou ordonnées en une perspective contemporaine : c'est encore dans le temps qu'il doit les situer, les unes s'exprimant en anachronismes et les autres en anticipations.

Pour comprendre la situation actuelle, il est utile de rappeler quelques faits, se plaçant vers la fin du siècle dernier et au début de ce siècle. Ce sont, avant tout, la création cantorienne de la théorie des ensembles, la mise au point de l'axiomatique hilbertienne et la constitution systématique de la logistique. Presque aussitôt ces nouvelles disciplines s'étaient trouvées menacées par la rencontre des antinomies. Alors s'ouvrit une ère — qui dure encore — d'essais et de propositions pour conjurer les paradoxes et de polémiques assez vives à ce propos.

68. Citons quelques dates : l'antinomie de BURALI-FORTI est de 1897; celle de RUSSEL, de 1903; à ce moment l'œuvre de CANTOR est terminée. La première édition des *Grundlagen der Geometrie* de HILBERT parut en 1899; les travaux de ZERMELO sur l'axiomatisation de la théorie des ensembles se placent entre 1904 et 1908; le monument logistique des *Principia Mathematica* est sur pied en 1913, synthétisant tout le travail des logisticiens jusqu'à cette date. En citant encore les *Problemi della Scienza* d'ENRIQUES, en 1905, venant après les œuvres philosophiques de POINCARÉ, nous aurons fixé, pour la suite, quelques points de repère utiles.

D'ailleurs, en traitant le Problème du fondement, nous avons déjà dû faire allusion à quelques-uns des courants qui ont entraîné la pensée mathématique jusque dans ses positions actuelles. Nous l'avons fait en insistant sur les aspects méthodiques; nous allons y revenir de façon plus descriptive.

2. Le formalisme Hilbertien.

69. Avec les *Grundlagen der Geometrie* de 1899, l'axiomatisation de la géométrie semblait accomplie. Même le problème de la non-contradiction avait reçu une solution provisoire par la «réduction» à la non-contradiction de l'arithmétique (au sens étendu, c'est-à-dire comprenant non seulement l'arithmétique des nombres entiers, mais encore ce que nous avons nommé la Dialectique des N et des ε).

En 1900, au Congrès International de Paris, la démonstration de la non-contradiction de l'arithmétique est précisément le second des grands problèmes à résoudre qu'HILBERT y énumère.

Sur quelle base placer cette démonstration ?

Un premier essai, présenté au Congrès International d'Heidelberg de 1904, rencontra la critique de POINCARÉ. Les traits essentiels de la future *théorie de la démonstration* y étaient déjà visibles : la logique ne peut être considérée comme antérieurement construite, car on ne peut totalement expulser les concepts arithmétiques de l'explication des lois de la logique; il faut tout reconstruire à la fois : logique et arithmétique.

POINCARÉ présenta l'objection suivante : le discours qui accompagne cette reconstruction contient quelques-uns des termes dont le sens doit être reconstruit. Y a-t-il un sens à parler de construction dans ces conditions ?

70. C'est seulement à partir de 1918 — et pour répondre à la *critique intuitionniste* — que fut formulée la doctrine préalable tenant compte de ces observations. Nous

avons expliqué par quel biais le problème de la non-contradiction pouvait être ramené dans la compétence du technicien : il faut pouvoir délimiter une discipline de caractère mathématique, d'une évidence privilégiée, et pour laquelle la question de la non-contradiction ne se pose pas — qui soit à elle seule responsable de toutes les démarches de la démonstration à faire.

On crut avoir trouvé la solution en deux temps :

Remplacer l'exercice naturel de la définition et de la déduction par une *technique des signes*, par un certain nombre d'opérations sur les symboles, selon des règles données une fois pour toutes; et remplacer les axiomes par des indications ou par des prescriptions sur certaines configurations de signes, en restant toutefois dans le cadre dit de la *pensée finie* (finite Denkweise).

Par cette dernière expression, on crut pouvoir assez facilement désigner un secteur spécialement assuré de la pensée mathématique. N'allait-il pas suffire de s'en tenir à des constatations élémentaires sur les assemblages tombant immédiatement sous les sens; ou du moins à des chaînes de signes ne comprenant qu'un nombre fini d'actes d'intuition de ce genre ? L'idée est tentante. Par un certain côté, elle est captieuse : si le nombre des éléments d'une de ces chaînes n'est pas borné d'avance, ce n'est pas uniquement d'actes d'intuition effectifs qu'il peut s'agir, mais bien plutôt de l'intention de les effectuer. De ce fait, la technique opératoire sur les signes n'est pas sous le contrôle de l'intuition dite immédiate. Il y rentre un élément dialectique assez incommode à circonscrire. C'est à l'exercice de cette technique opératoire et aux démarches de la pensée finie les accompagnant qu'on a donné le nom de *Métamathématique* : *c'est elle la discipline de caractère normatif privilégié à laquelle devait incomber le soin de faire voir que les opérations symboliques traduisant une définition ou une démonstration naturelles n'engendreront jamais le signe de la contradiction*.

C'est indéniablement l'espoir de voir la Métamathématique ainsi comprise fournir tous les moyens d'une démonstration de non-contradiction pour une large part des mathématiques qui anime les premiers travaux sur la Théorie de la démonstration, de HILBERT [24-30] ACKERMANN [31-33], BERNAYS [34-36], HERBRAND [37-40], V.NEUMANN [41], etc. Cet espoir pouvait être pris pour le *signe distinctif de l'école formaliste hilbertienne*.

Une remarque en passant : la doctrine préalable de l'hilbertisme admettait sans mot dire que la technique opératoire sur les signes, bien qu'elle n'ait jamais le droit de se référer aux significations que ces signes pourraient prendre dans la pensée naturelle, reste cependant toujours une fidèle image de celle-ci. C'était passer bien rapidement sur le *problème de l'adéquation du symbole au symbolisé*. Cette remarque vise d'ailleurs toute espèce de formalisme.

71. Qu'en est-il aujourd'hui ? Aux *«Entretiens de Zürich» sur les Fondements et la Méthode des mathématiques*, de décembre 1938 [42], M. BERNAYS déclarait : «On s'est convaincu qu'une théorie de la démonstration dans le sens de l'intention primitive du "point de vue finitiste" n'était pas en mesure d'atteindre son but».

Que s'était-il passé entre temps ? En 1931, GÖDEL [43] avait publié le travail auquel nous avons déjà fait allusion, qui accole une antinomie à l'espoir dont nous venons de parler.

Il s'avère ainsi que la Métamathématique est inapte à saisir adéquatement toute la signification, l'intégrité des intentions contenues et aperçues dans les axiomes originels.

N'en concluons pas que le courant formaliste est maintenant barré : ce qui est perdu, c'est uniquement la possibilité d'une démonstration de non-contradiction sur les bases primitives. Mais, dès ici, le courant hilbertien va se diviser.

3. La pensée exacte en Allemagne.

72. Nous avons déjà exposé sous quel aspect méthodique la question se présente maintenant : si l'on ne veut pas renoncer à l'idée de démonstration techniquement menée, il faut changer la métamathématique, circonscrire un plus large domaine d'évidence privilégiée.

Reprenant l'intention primitive, M. GENTZEN [44-45] a fait une proposition qui, bien qu'il s'en défende, modifie profondément le sens de toute l'entreprise. La convenance du point de vue finitiste, dit-il, ne provenait pas tant du fait que l'on y interdisait le recours à une infinité d'opérations que du fait d'être conforme à un autre point de vue qui le comprend et le dépasse : *le point de vue constructionniste*.

Celui-ci se caractérisera par le fait que jamais l'infini n'y interviendra comme totalité accomplie, mais seulement comme une classe ou une structure en construction, en état réglé d'extension.

Pourvu qu'on sache ainsi construire un nombre transfini, rien ne s'opposera à la mise en œuvre d'une induction transfinie correspondante, par laquelle l'esprit est censé répéter transfiniment une même opération.

Il est clair que, maintenant, on a dépassé la *Physique du signe*, qui formait un des moments essentiels de la technique opératoire finitiste (qui en était probablement le moment originel). Il est vrai qu'on l'avait déjà dépassée, pour s'engager dans une *Dialectique du signe*, en n'imposant aucune limitation à la complexité des formules et à la longueur des «raisonnements intuitifs». Mais cette fois, les arguments, les mais et les si à l'aide desquels on substituait l'opération effectuable en intention à l'opération effectuable dans une réalité contrôlée nous sont enlevés.

C'est dans une *Dialectique de la répétition, de l'intention de la répétition indéfinie, du renouvellement de l'intention, etc.*, qu'on nous engage. Pourquoi cet essai ne conduirait-il pas à une réussite ? Et peut-être arriverons-nous à conférer à une pareille *Dialectique de la répétition transfinie* la même valeur normative qu'à celle de la répétition finie.

La démonstration de non-contradiction serait alors accomplie : *mais c'est aussi que l'idée de démonstration aurait elle-même assez profondémet varié*. D'ailleurs pourquoi ne varierait-elle pas ?

Cependant, la question de l'adéquation du symbole au symbolisé, que nous évoquions déjà à propos de la métamathématique hilbertienne, se fait ici plus pressante. D'où savons-nous que les raisonnements de la *métamathématique transfinie* effectués sur les symboles continuent à engager aussi la pensée naturelle ? C'est là un point de doctrine qui mérite réflexion.

73. Du point de vue méthodique, toute autre proposition concernant l'extension de la métamathématique est légitime, pourvu qu'elle fasse de celle-ci une discipline normative *a priori* (comme le sont d'ailleurs restées les mathématiques classiques aux yeux de beaucoup). Nous aurons, dans un instant, l'occasion de parler du *point de vue intuitionniste*, qui place d'emblée l'exercice de la pensée mathématique dans un climat normatif inconditionnel. On pourrait donc penser à lui faire jouer le rôle de métamathématique. La proposition en a été faite, et il semble que, devant l'insuffisance du point de vue finitiste, HILBERT y ait aussi songé.

Cependant, il faudrait veiller à ne pas servir deux maîtres à la fois. L'intuitionnisme prétend être un système conceptuel autonome : non pas un secteur des mathématiques, mais *la* mathématique. Il est paradoxal de lui demander de justifier, à travers les symboles, certaines pratiques dont il ne veut point lui-même. D'ailleurs, l'intuitionnisme n'admet pas l'équivalence inconditionnelle de la pensée originelle et de sa traduction formalisée. En faire une métamathématique, c'est l'employer à contre-sens.

74. Nous avons exposé, dans la partie critique, les conséquences méthodiques qui semblent ressortir de l'échec des procédés formalisateurs, en face des problèmes généraux de la non-contradiction, de la décision, etc. La légitimité de la pratique formalisatrice n'en est pas ébranlée; c'est plutôt les idées générales de la démonstration et de la définition qui en sortent affaiblies : celles-ci ne doivent plus être imaginées pourvues d'avance de toutes leurs propriétés *ne varietur*. Au contraire, les procédés formalisateurs semblent précisément idoines à en préciser le contenu, à les pousser vers une signification plus différenciée. D'autre part, comme ils ne sont pas en mesure de saisir adéquatement les intentions originelles dans leur (sommaire) intégrité, la confrontation du travail dans le formel avec les intentions primitives semble être également une exigence méthodique inévitable. *Le plan formel ne doit pas être pensé autonome*.

L'on s'attendrait peut-être à voir s'installer une doctrine tenant compte de ces deux moments complémentaires : *formalisation et maintien des intentions originelles*. Mais le souci du mathématicien de se retrouver devant un problème technique proprement posé, et son hésitation devant la pensée critique, expliquent que la seconde de ces exigences n'intervienne que faiblement. Le climat normatif se rétablit autour d'un *formalisme opératoire et constructif* montrant une assez nette tendance à l'autonomie.

75. En Allemagne, le climat normatif semble se reconstituer, pour une part au moins, autour de *l'idée de pensée exacte* (exakte Denkweise), que REIDEMEISTER [46] employait déjà avec un recours à la formalisation. Mais cette expression semble aussi parfois désigner purement et simplement la pensée s'exerçant selon les normes mathématiques habituelles.

Un centre d'influence assez actif semble être le séminaire logistique de M. H. SCHOLZ, à Münster.[1]

4. Le logicisme polonais.

76. La contribution polonaise aux études sur les fondements est des plus importantes. Le titre de la revue *Fundamenta Mathematicae*, fondée en 1920, était à lui seul un programme. Sa réalisation a été activement menée et l'intention originelle ne semble pas s'être affaiblie.

Cependant la tâche que nous nous proposons ici de jeter un coup d'œil circulaire sur les positions occupées actuellement par la philosophie mathématique ne nous permet de rendre justice qu'en passant. aux résultats d'ordre plutôt technique des recherches engagées autour de M. SIERPINSKI sur l'axiome du choix et le problème du continu, et autour de M. ŁUKASIEWICZ sur l'axiomatisation de la logique et les logiques polyvalentes.

En revanche, il nous. faudra insister sur le climat philosophique qui semble informer une partie des travaux de l'école polonaise. L'influence de base semble être celle de la philosophie de BRENTANO, c'est-à-dire d'un *réalisme tempéré*. Elle doit cependant composer avec les exigences de la technique formalisatrice, qui, comme nous en avons déjà fait la remarque, tend à réinstaurer une attitude normative *sui generis*.

Les philosophes et logiciens polonais, dit M. AJDUKIEWICZ [48], sont en échange réciproque d'idées, et forment, à l'exception de M. L. CHWISTEK, l'école de Varsovie.[2] MM. TWARDOWSKI et ŁUKASIEWICZ en furent les maîtres. Les postulats essentiels de l'école polonaise sont :

a} l'anti-irrationalisme;

b} la clarté des concepts.

Le formalisme, aussi bien que le réalisme des classes, répond naturellement à ces exigences. Cependant il ne semble pas que l'on ait ressenti la nécessité de les accorder ou de les arbitrer en une doctrine préalable cohérente.

[1] Voir la nouvelle collection des *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften* [47].

[2] Dite aussi quelquefois école de Varsovie-Lwow.

77. Un des thèmes les plus fréquents de la philosophie scientifique polonaise est celui de la distinction à faire entre *langue*, *métalangue* et *sémantique*.

En analogie avec la métamathématique hilbertienne, MM. AJDUKIEWICZ [49], LEŚNIEWSKI [50], ŁUKASIEWICZ [51] et TARSKI [51] développèrent la conception d'une métalogique et, plus généralement, d'une métalangue, à adjoindre à toute langue complètement formalisée.

Ce dernier concept joue un rôle de premier plan dans ces considérations. Nous allons l'expliquer brièvement.

La logistique a montré comment un secteur du langage peut être formalisé. Supposons maintenant que l'on ait trouvé un jeu de signes grâce auquel toutes les combinaisons verbales légitimes dans une certaine langue puissent être traduites symboliquement. À *l'activité verbale originelle va correspondre une activité symbolique induite*. Celle-ci ne sera pas complètement désordonnée. Supposons que l'on ait pu apercevoir et formuler toutes les règles dont l'observation rende l'activité symbolique autonome. Autonome dans le sens suivant :

a} Les règles ne font aucune allusion au sens des symboles, mais seulement à leur «façon d'être» sur le plan symbolique.

b} Le jeu réglé des symboles sait engendrer un modèle symbolique pour toute phrase que la langue permet, et n'engendre aucun modèle pour lequel la langue ne saurait proposer au moins une réalisation. À ce moment nous dirons que la langue est *complètement formalisée*.

78. *Il n'est pas difficile d'apercevoir le réalisme traditionnel à l'arrière-plan d'une définition de ce genre*.

À tout mot correspond un symbole; le même symbole correspond peut-être à toute une classe de mots. Pour que la correspondance langue-système formel fonctionne, il ne faut point que l'exercice de pensée s'exprimant dans la langue brouille à nouveau ces classes. Mais cette pensée n'est pas gratuite : elle vise une certaine réalité. Celle-ci est donc elle-même adéquatement et durablement reproduite par la répartition des mots en classes : c'est le réalisme des classes, tel qu'on le découvre aussi à la base des *Principia Mathematica* et de presque toute philosophie à base de logistique.

79. Mais qu'est-ce qu'une métalangue ? De même que la métamathématique est le domaine où il est légitime de parler de la structure formelle des mathématiques, la métalangue est une langue qui dispose des moyens de parler de la *structure formelle, de la syntaxe de la langue*. Mais la comparaison suggère une objection. La métamathématique dépend de façon essentielle de la dialectique des signes qu'on y pratique : elle peut être finitiste, elle peut être transfinitiste. La métalangue ne dépendra-t-elle pas de la dialectique des structures qu'on y pratiquera ? Supposer qu'il existe, en soi, une réalité des structures donnée d'avance que la métalangue exprime adéquatement, c'est encore une fois le réalisme.

80. Enfin, qu'est-ce que la sémantique ? C'est, d'après TARSKI [52], l'ensemble des considérations qu'on peut faire sur la correspondance des expressions du langage aux choses et aux faits visés par le langage. En un mot, *c'est la théorie de l'adéquation de l'expression de la pensée à l'objet de la pensée*. Mais supposer qu'on puisse opérer une trichotomie rigoureuse entre langue, métalangue et sémantique, n'est-ce pas encore une fois le réalisme ?

Certes, *ces concepts révèlent chacun un aspect de toute formulation de la pensée — mais un aspect schématique seulement*. Supposer qu'ils en révèlent un aspect adéquat, c'est poser le réalisme classique en doctrine préalable et c'est rentrer dans toutes les difficultés dont on croyait être sorti. C'est pourquoi nous ne pouvons penser que les vues de l'école polonaise soient idoines à la connaissance scientifique actuelle. Cette remarque n'en touche d'ailleurs ni la validité, ni la portée en tant que construction rationnelle (schématique).

81. Quelques mots sur la logique à trois termes de M. ŁUKASIEWICZ [53] vont nous permettre d'entrer avec une remarque de principe dans la question des *logiques modales*.

La vérité et la fausseté sont les deux modalités, le vrai et le faux les deux valeurs de la logique classique des propositions. *Une logique modale est une dialectique qui arbitre d'autres modalités*, la possibilité, la nécessité, l'impossibilité, la contingence, etc. Formalisée, ce pourrait être un système formel, un calcul. avec autant de valeurs que de modalité.

Dans notre esquisse du § 9, les logiques modales auraient à figurer parmi les dialectiques des conduites ou des comportements élémentaires.

Pour établir une logique modale, deux voies sont ouvertes :

a) Partir du sens catégorique des modalités, c'est-à-dire de la connaissance *a priori* qui s'exprime dans les associations que nous établissons normativement entre elles. Et en abstraire telle ou telle dialectique par le procédé de l'abstraction schématisante, capable déjà d'engendrer la logique du vrai et du faux.

L'axiomatisation schématisante pourrait ensuite trouver son couronnement dans une formalisation.

La voie inverse est aussi praticable.

b) Établir un système formel, par analogie formelle avec les seuls aspects formels de la logique classique à deux valeurs. En employant, peut-être, un procédé quelconque de généralisation, ou de variation de tel caractère formel, dont la pratique de l'axiomatisation nous a donné tant d'exemples.

Il restera ensuite à faire voir que ce système formel peut trouver une réalisation dialectique à l'aide des notions catégoriques convenables.

Si la méthode *a)* ne parvenait pas à nous proposer quelque formalisation intuitivement simple, il faudrait dire qu'elle est restée en deça de la forme standard que peut prendre aujourd'hui une théorie.

Si la méthode *b)* ne sortait pas du formel, il faudrait dire que le système formel

proposé ne mérite qu'imparfaitement le nom de logique.

Car l'idée de logique comporte la réalisation d'une intention primitive inéliminable : celle d'un accord et d'un raccord (schématiques peut-être) avec le normatif.

La méthode par laquelle M. ŁUKASIEWICZ établit sa logique à trois valeurs est la seconde. Cependant, la seconde exigence, celle de la réalisation par une logique modale, reste encore en suspens.

5. Le logicisme américain.

82. Sans souci de la logique géographique, nous allons maintenant passer en U.S.A. La transition est tout naturellement fournie par le rôle que les études logiques y jouent dans la philosophie scientifique.

Ici encore, il nous faudra renoncer aux détails, et surtout aux détails techniques, et nous contenter d'indications sommaires sur quelques traits caractéristiques.[1]

Le premier de ces traits est l'absence d'une tradition qui maintienne avec persistance certaines positions antérieures; l'absence de certains climats philosophiques où se transmet, en somme, et en dépit de certaines apparences, un esprit hermétiquement clos et étranger aux entreprises actuelles de la connaissance.

C'était là une position de départ à la fois forte et faible.

Forte, car elle permettait de poser les problèmes de la connaissance dans la lumière immédiate de l'expérience scientifique.

Faible, car l'absence d'une tradition critique avertie exposait au risque de ne pas reconnaître ces problèmes dans leur spécificité authentique; et de s'engager, comme dans une voie neuve, dans quelque chemin déjà battu.

Or la force et la faiblesse de cette position semblent devoir toutes deux développer leurs conséquences.

D'une part, le primat de l'attitude scientifique avait trouvé son expression dans un pragmatisme d'une nature certainement nouvelle et originale. Il s'y instituait une large collaboration de toutes les disciplines, dont les sciences physiques et mathématiques et spécialement la logistique n'étaient pas exclues, mais où l'influence de la biologie et de la sociologie était cependant la plus sensible.

Le développement de cet empirisme américain est jalonné par les noms de PEIRCE, JAMES, DEWEY et MEAD.

Peut-être la revue *Philosophy of Science* (fondée en 1934) représente-t-elle plus spécialement cette tendance.

Le climat de l'empirisme scientifique se prête éminemment à une reconsidération des problèmes philosophiques touchant la connaissance, mais à la condition d'engendrer un *empirisme critique*. La faiblesse de la position de départ à laquelle nous faisions allusion semble se manifester en ceci : qu'un assez fort courant de

[1] Voir C.W. MORRIS : *Some aspects of recent American scientific philosophy* [54].

l'empirisme américain semble évoluer vers un empirisme logique ou, mieux encore, *logistique*.

83. Quant à ce qui regarde plus spécialement la philosophie mathématique, ces dernières années sont marquées par de fort belles études axiomatiques [55] (qui restent, quant à l'essentiel, du type de l'axiomatique fixé par les *Grundlagen* d'HILBERT) et par une véritable floraison des études logiques. La fondation de l'*Association for Symbolic Logic et du Journal of Symbolic Logic* (1936) témoignent de la vogue grandissante de ces études.

Il est assez hasardeux de vouloir démêler les différents éléments de la doctrine ou des doctrines préalables qui informent cette multiple activité. Car le *souci de la rigueur déductive* élimine assez généralement ce que l'on pourrait appeler le *souci de la rigueur dialectique*, spécialement indiqué en ces matières après les expériences faites dans la théorie de la démonstration : nous voulons dire le souci de la cohérence des vues préliminaires et celui de s'entendre au préalable sur ce que c'est que la rigueur déductive. Les doctrines préalables restent donc implicites, les sources de l'évidence non critiquées et le normatif non analysé — ce qui est, en somme, le climat normalement intransigeant de la spéculation mathématique.

84. Les quelques remarques qui vont suivre ne devront donc être interprétées que comme des indications très schématiques. La première est relative à l'évidente influence des *P.M.*[1] Du point de vue technique tout d'abord : c'est ainsi que M. FEYS [56] a pu rendre compte d'une bonne part des *directions nouvelles de la logistique aux États-Unis* en les rattachant à telle ou telle étape de l'exposition des *P.M.* [57-63].

Du point de vue philosophique ensuite : en même temps que le programme des *P.M.*, le réalisme des classes (ce qu'on a appelé avec tant de raison l'atomisme logistique des *Principia* et qui est le moment essentiel de sa doctrine préalable) semble être souvent accepté implicitement comme évident par lui-même ou comme nécessaire. De ce fait, la liaison du problème des fondements à la logique mathématisée incline fortement tout un secteur de la philosophie mathématique américaine vers un réalisme conscient ou inconscient, dont on connaît trop, par ailleurs, l'insuffisance à rendre compte de la pensée moderne.

85. La seconde remarque (que nous avons déjà faite à propos des logisticiens polonais), c'est que ce réalisme s'accompagne et s'accommode des exigences formalisatrices issues de vues sur l'évidence et sur l'intuition immédiate tout à fait étrangères au réalisme. Il en résulte un dualisme assez curieux : la discipline originelle emprunte tous ses termes primitifs, de prédicat, de relation, etc., à la *métaphysique réaliste; mais la métadiscipline* (au sens hilbertien), *c'est-à-dire la discipline dont relèvent les procédés auxquels les symboles doivent ou peuvent être soumis, présente un caractère opérationnel* (où reparaissent peut-être certaines exigences empiristes authentiques). Or, est-il possible d'oublier que le maniement des signes ne s'opère pas en dehors de toute logique ? Que la discipline originelle se présente aussi sous l'aspect de la *logique de l'objet*, la logique du vrai et du faux étant isomorphe à la *logique de l'être et du non-être* ? Que par conséquent, dans les opérations effectuées sur les symboles, on peut apercevoir à la fois la mise en œuvre de la métadiscipline et celle de la discipline originelle non-formalisée ? Qui nous assure quel tous les problèmes, à propos desquels la logique fut conçue, ne renaîtront pas au sein de la métadiscipline ?

[1] P.M.: *Principia Mathematica*.

En l'absence d'une doctrine préalable qui mette explicitement d'accord les procédés opérationnels de la métadiscipline avec la métaphysique réaliste, cette double fondation de la discipline originelle est une monstruosité méthodique.

La métamathématique hilbertienne n'est pas exposée à ce reproche, parce qu'elle n'est qu'un secteur privilégié de la mathématique.

D'ailleurs, la métalogique au sens de tout à l'heure peut être complètement détachée de la logistique. En tant que *théorie de notre comportement vis-à-vis des assemblages de signes*, elle pourrait s'établir dans son propre climat d'évidence, au même titre que toute autre analyse combinatoire, et sans aucun recours préalable au réalisme des classes. Ce serait alors une réalisation — partielle il est vrai — d'un Behaviorisme théorique (au sens où nous disions aussi que la Dialectique des signes fait partie de la Dialectique des comportements).

86. Une troisième remarque, c'est que dans certains travaux récents, spécialement de CHURCH, KLEENE et ROSSER la situation créée par les résultats de GÖDEL est à l'origine de recherches qui (en rappel des distinctions faites dans la partie méthodique) se rapportent moins au problème orthodoxe du fondement qu'aux problèmes de la méthode. On peut les envisager comme des contributions à l'analyse créatrice des notions de démonstration, de construction, ou de définition.

Enfin, on ne saurait passer sous silence l'intérêt porté aux États-Unis aux *logiques des modalités* [64-66].

Le thème général : *qu'est-ce qu'une logique ?* semble susceptible de devenir un point de rencontre et de confrontation de tous les courants actuels, des courants traditionnels aussi bien que des courants nouveaux.

Nous en avons déjà dit un mot à propos de la logique de M. ŁUKASIEWICZ. En Europe, et sans parler de la logique intuitionniste, ni des essais idonéistes sur lesquels nous reviendrons, il faut encore rapporter à ce thème les idées de M. ORESTANO [67-68] sur une logique générale, et, par exemple, celles de M. POIRIER [69] sur la logique algorithmique et le nombre.

Des deux moments que nous considérons comme décisifs, le moment formel et l'accrochage au normatif *a priori*, il est assez compréhensible que le climat logistique ait surtout mis le premier en évidence. Il faut cependant noter, dans le *pragmatisme conceptualiste* de C.J. LEWIS [64] et dans sa théorie de la «strict-implication» (explicitation de l'implication dans les catégories modales du nécessaire et du possible) la volonté de tenir compte à la fois du formel et des facteurs qui orientent le choix d'un système formel privilégié.

87. En ne conservant qu'une impression d'ensemble nécessairement très sommaire, on peut dire que, par l'intermédiaire de la logistique, le réalisme traditionnel influence fortement la philosophie américaine. Mais on ne peut affirmer que l'arbitrage entre le pragmatisme, le formalisme opératoire et les vues réalistes sache d'ores et déjà maintenir ces trois «phases» dans un équilibre capable de servir de fondement à une philosophie moderne de la connaissance.

6. Le mouvement de l'Unité de la Science.

88. Nous passerons maintenant à un mouvement sans foyer géographique bien déterminé : *le mouvement dit «de l'Unité de la Science»*.

D'après les indications historiques de M. FRANK [70], le mouvement semble être sorti d'une réaction anti-métaphysique contre les vues philosophiques alors courantes en Europe centrale, vues où le primat de la métaphysique réaliste était encore incontesté.

Depuis la première *Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften*, à Prague, en 1929, une opposition commune aux «Geisteswissenschaften», à la métaphysique, à l'irrationalisme semble avoir rapproché des groupes à l'origine assez éloignés, tels que le Cercle de Vienne, le groupe de Berlin, l'école polonaise et quelques autres philosophes rationalistes, logicistes ou empiristes français, scandinaves ou américains.

Autour de la revue *Erkenntnis*, et *autour d'un programme se résumant dans la volonté de créer une philosophie d'inspiration authentiquement scientifique se sont ensuite rencontrées des tendances fort diverses*.

89. À vouloir tenir compte de toutes les opinions exprimées à la Conférence préliminaire de Prague en 1934, et les années suivantes, aux Congrès internationaux de Paris, Copenhague, Paris et Cambridge, il est impossible de circonscrire une doctrine philosophique engageant tous les participants habituels ou occasionnels, même sur les points les plus essentiels.

Il s'est cependant établi l'habitude d'envisager les vues du *noyau originel* comme *représentatives* du groupement. Ces vues elles-mêmes ont subi, en ces quelques années, d'assez sérieux remaniements. Certains traits essentiels sont cependant restés invariables : ils nous intéressent par la façon dont ils mettent en présence, pour rendre compte de la connaissance objective, les mathématiques et la réalité [71-75].

Le lieu de la rencontre, c'est la langue, spécialement le langage de la science.

Les modalités de la rencontre seront imaginées sur le modèle de la rencontre des mathématiques et de la métamathématique hilbertienne.

Toute formule mathématique peut être interprétée sous deux aspects :

a) quant à sa signification originelle,

b) quant à sa structure formelle.

On va donc commencer par imaginer une structure purement formelle du langage, en répartissant les mots en classes et en réunissant en une *pure syntaxe* les règles selon lesquelles ces classes pourront être mises en relations verbales-formelles.

Les mathématiques et la logique font partie de la syntaxe. Comme celle-ci, *face à la réalité, elles sont tautologiques* : la syntaxe ne vise que l'expression verbale.

Au *langage ainsi formalisé* s'oppose le *langage matériel*, dont la mission est d'exprimer les *énoncés de fait*.

La mission de la philosophie est de surveiller la syntaxe, dont la stricte observance préservera des faux problèmes.

90. Mais il faut bien que l'aspect formel et l'aspect matériel du langage soient accrochés l'un à l'autre. Supposons que q_1 soit le signe verbal d'un objet q; Q un attribut réel de ce dernier; et Q_1 un certain attribut du signe verbal de Q. Voici maintenant la règle universelle de la rencontre du formel et du matériel [71] :

L'attribut Q_1 appartient dans le langage formel au signe q_1 *si l'attribut réel* Q *appartient à l'objet* q.

Cet énoncé, à lui seul, et indépendamment de tout l'appareil logistique dont on pourra l'entourer, règle complètement la question du point de vue philosophique : la solution envisagée emprunte ses idées essentielles et ses articulations décisives à la métaphysique réaliste.

Conçues, pour porter pièce au réalisme traditionnel, dans les termes de ce même réalisme, les vues «orthodoxes» de notre mouvement n'ont point su s'en affranchir.

7. Brève remarque.

91. Les points de vue que nous allons encore examiner se distinguent en ceci : *qu'ils ne reconnaissent pas comme valables sans examen préalable les positions normatives traditionnelles de la pensée mathématique*.

L'intuitionnisme, il est vrai, pour rétablir immédiatement un nouveau climat normatif qui lui soit propre.

L'idonéisme, au contraire, pour introduire dans l'idée du normatif un élément critique qui lui enlève son caractère absolu, et qui permette d'accepter alternativement des positions normatives inconciliables, comme on accepte alternativement des géométries inconciliables dans un même cadre axiomatique.

8. L'intuitionnisme hollandais et Mannoury.

92. L'axiomatisation de ZERMELO de la théorie des ensembles avait soulevé les critiques de BOREL, LEBESGUE et BAIRE, entre autres. La théorie générale des ensembles, pensaient ces savants, est trop éloignée de l'intuition mathématique immédiate pour qu'un axiome visant un ensemble quelconque ait une signification sûre. C'est pourquoi ils se sont restreints à ne parler que des ensembles qui leur paraissaient clairement donnés à l'intuition.

Le point de vue intuitionniste comporte une conception assez analogue du rôle de l'intuition. L'intuition de la vérité, dira BROUWER [76-78], est le seul critère du vrai. Critère d'ailleurs infaillible, car l'intuition mathématique immédiate représente la partie exacte de notre pensée, indépendante de toute vérification expérimentale, indépendante également du langage. Cette intuition n'est d'ailleurs point automatique. L'activité créatrice de l'esprit y collabore.

Selon cette conception, il est impossible de statuer une fois pour toutes sur les conclusions mathématiques permises et celles qui ne le sont pas : chaque conclusion doit être jugée selon son évidence propre. Dès lors, les procédés formalisateurs sont impropres à trancher la question du fondement. L'intuitionniste ne consent à formaliser que par commodité, en maintenant vigilante derrière la forme morte du symbole, l'intuition de sa signification.

Mais l'intuition qui est ainsi invoquée ne saurait-elle être un peu précisée ?

L'intuitionnisme refuse l'intuition géométrique, l'*intuition du sensible au sens kantien*. Il se replie sur la prise de conscience d'actes mentaux élémentaires : la répétition et le libre choix.

Ainsi, par exemple, le *nombre quelconque* de l'intuitionnisme n'est pas, comme dans les mathématiques classiques, une fraction décimale telle que 3,1415..., dont toutes les décimales sont arbitraires, mais supposées déterminées d'avance. C'est une fraction décimale dont les décimales sont à choisir librement l'une après l'autre.

La différence est grande. Dans ce dernier cas, l'alternative brute :

deux nombres sont égaux ou inégaux,

ne joue plus.

En effet, deux suites de choix doivent être pensées égales, s'il est fixé ou entendu d'avance qu'à chaque étape le choix sera le même pour l'une et pour l'autre, ou elles doivent être pensées inégales s'il est constaté ou entendu ou fixé d'avance qu'un choix de rang déterminé sera différent pour l'une et pour l'autre; mais s'il est seulement entendu que le choix sera une fois différent, sans spécifier quand, l'échéance peut être remise indéfiniment : la décision est, en fait, suspendue.

Ce seul exemple montre qu'on a affaire à une nouvelle dialectique, qui coïncide avec la dialectique classique, tant qu'il ne s'agit que d'un nombre borné d'actes de décision; qui s'en écarte si ce nombre est indéterminé. *Dialectique s'établissant dans son propre climat d'évidence avec une entière légitimité.*

93. À ce propos, rappelons que, sur la foi du mot «intuition», on fait parfois un rapprochement entre l'intuitionnisme et le kantisme. Peut-être serait-il plus juste de confronter la conception brouwerienne du vrai avec celle de SPINOZA. Celui-ci ne disait-il-pas déjà que :

«L'unique criterium de la vérité, c'est la vérité elle-même» (*Tractatus de Intellectus Emendatione*, 1, 12).

«La méthode n'est rien d'autre qu'une connaissance par réflexion, elle est l'idée de l'idée» (*Ibid.*, 1, 13).

«Ce qui constitue la forme de la pensée vraie doit être cherché dans la pensée elle-même et déduit de la nature de l'intelligence» (*Ibid.*, 1, 24).

94. Avec les réserves rappelées plus haut, HEYTING [79] a formalisé la logique intuitionniste et KOLMOGOROFF [80] en a donné une interprétation dans la logique ordinaire : *c'est la logique des problèmes résolus et à résoudre* [81].

Dans la perspective critique, le retrait de l'intuitionnisme sur l'intuition «interne» rend encore plus pressante la question suivante : comment se fait-il que l'intuition, activité créatrice de l'esprit, soit commune à tous les hommes ? Une étude expérimentale de l'intersubjectivité apparaît inévitable. Non pas que l'intuitionniste le demande : ce serait modifier le caractère fondamentalement normatif de sa position.

Cette étude a été entreprise par MANNOURY.

95. Fonder les mathématiques, c'est, pour MANNOURY [82], les concevoir comme une manifestation de la vie dans ses rapports avec d'autres manifestations de la vie.

Liées à la parole, c'est par l'étude des actes verbaux qu'on les atteindra efficacement. Cette étude sera expérimentale, psychologique. Ce sera la *signifique expérimentale*, que MANNOURY définit ainsi : *étude des associations psychologiques qui sont à la base des actes verbaux, en exception des sciences de la parole au sens étroit* (étymologie, etc.).

Le fondement signifique des mathématiques doit en précéder le fondement axiomatique. Démontrer, réfuter, déduire sont aussi des mots de la langue de tous les jours dont on ne saurait éliminer tout le contenu émotionnel et volitionnel.

Ainsi la formalisation — assez en accord avec les vues que nous avons nous-même présentées — sera toujours schématisante.

MANNOURY formalise l'analyse psychologique pour la rendre plus efficace. Il y introduit certaines distinctions susceptibles d'écarter de nombreux malentendus (ou faux-problèmes) ! En voici deux exemples :

Il oppose le *sous-complexe physique* et le *sous-complexe logique*, ce qui correspond plus ou moins à notre distinction entre la dialectique de la sensation et la dialectique des conduites élémentaires.

La valeur indicative et la valeur émotionnelle des lois naturelles répondent respectivement à des régularités des associations attente-perception et perception-attente.

Sur plusieurs points en accord avec l'intuitionnisme, MANNOURY s'en distingue cependant par une position critique plus large.

9. L'idonéisme.

96. Notre introduction mentionnait les *Problemi della Scienzia* (1905) d'ENRIQUES. On y trouve, sur l'aspect psychologique des opérations logiques, des vues à rapprocher de celles de MANNOURY. Mais nous voulons surtout rappeler le résultat d'une analyse profonde et convaincante : *l'analyse des notions de fait et d'objectivité*.

Ce résultat, c'est que ni l'une ni l'autre de ces notions n'est donnée d'avance dans la plénitude de sa signification. Le sens commun et l'intuition immédiate n'en disposent que dans un sens sommaire. Dans le savoir actuel, ce sens s'est précisé et différencié. Mais l'objectivité scientifique n'existe pas antérieurement à la science et en dehors de la science : *c'est ce que la science a su faire de la notion commune d'objectivité*. Et de même, ce que la science appelle un *fait*, ce n'est pas le fait en soi de l'appréhension immédiate : *c'est ce que la science a su faire du fait brut et sommaire*.

En bref, le fait scientifique et l'objectivité scientifique ne sont explicables que par la science.

C'est là une remarque capitale : elle doit être étendue à toutes les notions dont la science s'empare pour s'en servir. Nulle d'entre elles ne possède encore, dans la langue de tous les jours, le sens différencié que son rôle dans les techniques et dans la spéculation scientifique lui conférera. Ni le mot de géométrie, ni celui de logique, ni celui de définition ou de démonstration, ni même celui d'existence ne portent en eux, de façon prédéterminée, les significations que l'activité de l'esprit saura leur construire.

Il est vain de vouloir les réduire à un savoir antérieur, ou à des procédés automatiques.

Seul l'esprit scientifique peut être responsable de la critique de la science, de la philosophie scientifique.

97. C'est là, dira-t-on, le programme commun de tous les philosophes scientifiques. Certes ! Mais les explications précédentes montrent que, de toute évidence, il n'est réalisable que si l'on abandonne l'idée d'un savoir complètement prédicatif et d'un fondement complètement déductif. La solution ne peut consister que dans un *arbitrage constamment renouvelable entre la connaissance acquise et la connaissance a priori* — ou entre l'invention et l'intuition. C'est le premier postulat méthodique à satisfaire par tout système de vues sur la connaissance s'il prétend être idoine à la connaissance scientifique.

C'est aussi le premier postulat de la doctrine idonéiste [88-89]. Celle-ci a d'ailleurs été exposée dans quelques-uns de ses traits essentiels, au cours de la partie méthodique, ce qui nous dispense de le faire ici. Le présent exposé, sans que la chose ait été préméditée, est d'autre part une démonstration *par le fait* que l'idonéisme est capable de fournir le cadre où les si nombreuses nuances de la pensée mathématique peuvent être interprétées d'un point de vue unitaire.

Nous nous bornerons à rappeler quelques essais inspirés de préoccupations analogues (qui regardent, il est vrai, autant la physique que les mathématiques et viendraient s'inscrire sous la rubrique : Dialectique de l'expérience systématique) de MM. DESTOUCHES [83-84] et MARIANI [85] et de Mlle FÉVRIER [86-87].

10. La philosophie scientifique en France.

98. En faisant ainsi rapidement la revue des points de vue actuels, nous n'avons certes pas été complet. Le commentaire annuel détaillé nous permettra de revenir sur bien des omissions. Mais l'injustice de ce rapide exposé serait criante, si nous ne relevions pas le rôle de toujours de la pensée philosophique en France. Nulle part, l'esprit philosophique et l'esprit scientifique n'ont été plus étroitement et plus continûment en contact que dans ce pays.

Les limites de cette étude ne nous permettent pas d'en multiplier les témoignages. Simplement comme points de repère, rappelons la Correspondance [90] sur les ensembles entre MM. BAIRE, BOREL, HADAMARD et LEBESGUE. Rappelons l'œuvre philosophique de POINCARÉ et ses discussions avec COUTURAT et RUSSEL sur la définition des concepts mathématiques par la logistique, avec ZERMELO sur l'axiomatique des ensembles, avec HILBERT sur l'axiomatique des nombres. On ne saurait passer sous silence une œuvre comme *Les Étapes de la philosophie mathématique* de M. L. BRUNSCHVICG — pour ne citer que ce qui regarde spécialement les mathématiques.

Il serait injuste aussi de ne pas rappeler le rôle de la *Revue de Métaphysique et Morale*. (Il est d'ailleurs injuste de la citer seule).

Cette tradition épistémologique est loin d'être interrompue, à n'en prendre pour preuve que les travaux récents de MM. BACHELARD [91-94], POIRIER [95], CAVAILLÈS [96-97] et LAUTMANN [98-99], entre beaucoup d'autres. Nous reviendrons sur ces ouvrages récents dans notre prochain fascicule et nous aurons à en dégager les résultats et les tendances.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE[1]

[1] La prochaine chronique reprendra plus à fond les *Problèmes de l'heure*.
[2] P. VALÉRY : *Variété I*, N.R.F., Paris.
[3] H. POINCARÉ : *Des fondements de la géométrie*, Chiron, Paris, p. 5-12.
[4] H. POINCARÉ : *Dernières pensées*, Flammarion, Paris (1913), p. 57-97.
[5] H. POINCARÉ : *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, p. 18-91.
[6] F. ENRIQUES : *Les concepts fondamentaux de la science*, Flammarion, Paris, p. 42-61.
[7] L. BRUNSCHVICG : *L'expérience humaine et la causalité physique*, F. Alcan, Paris, p. 478-490.
[8] H. WEYL : *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften*, Handbuch der Philosophie, Abteilung 2, Beitrag A (1926).
[9] F. GONSETH, voir la note [88], p. 61-66.
[10] I. NEWTON : *New Theory of light and colours*, Philos. Trans. (1672-1676).
[11] F. LAMBERT : *Beschreibung einer Farbenpyramide*, Berlin (1772).
[12] W. V.GOETHE : *Zur Farbenlehre*, Tübingen (1810).
[13] A. GRASSMANN : *Zur Theorie der Farbenmischung*, Pogg. Ann., **89** (1858), p. 69-84.
[14] H. V.HELMHOLTZ : *Handbuch der Physiologischen Optik*, Hamburg und Leipzig (1896).
[15] E. HERING : *Grundzüge der Lehre vom Lichtsinn*, Leipzig (1905-1920).
[16] E. SCHRÖDINGER : *Grundlinien einer Theorie der Farbenmetrik*, Annalen der Phys. **63** (1920), p. 397-481.
[17] J.F. SCHOUTEN : *Vierfarbentheorie*, Proc. Amsterdam, **38** (1935), p. 590.
[18] G. FECHNER : *Elemente der Psychophysik*, 3e édition, Leipzig (1907).
[19]* K.W. WAGNER : *Vorschlag zu einer praktischen Definition der Lautheit*, Zeitschr. für Hochfrequenz und Elektroakustik **52** (1938), p. 14.
[20] H. POINCARÉ : *La logique de l'infini*, in *Dernières Pensées*, Flammarion, Paris (1913), p. 101.
[21] F. ENRIQUES : *Les problèmes de la science et de la logique*, F. Alcan, Paris, p. 149.
[22]* Ed.Ch. TOLMAN : *An operational analysis of Demands*, in *Das Kausalproblem*, F. Meiner, Leipzig, et Levin et Munksgaard, Kopenhagen (1937).
[23] F. GONSETH : *La logique en tant que physique de l'objet quelconque*, Actes du Congrès int. de phil. scientif. **6** (1936), Hermann, p. 1-23.
[24] D. HILBERT : *Axiomatisches Denken*, Math. Annalen **78** (1918), p. 405-415.

[1] Le signe * précède les ouvrages ou les articles parus après 1936.

[25] D. HILBERT : *Neubegründung der Mathematik*, Abh. Math. Semin. Hamburg **1** (1922), p. 157-177.

[26] D. HILBERT : *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, Math. Annalen **88** (1923), p. 151-165.

[27] D. HILBERT : *Die Grundlagen der Mathematik*, Abh. Math. Sem. Hamburg. **6** (1928), p. 65-85.

[28] D. HILBERT : *Probleme der Grundlegung der Mathematik*, Math. Annalen, **102** (1930), p. 1-9.

[29] D. HILBERT : *Die Grundlegung der Elementaren Zahlentheorie*, Math. Annalen **104** (1930).

[30] D. HILBERT : *Beweis des Tertium non datur*, Nachr., Ges. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Kl. (1931), p. 120-125.

[31] W. ACKERMANN : *Begründung des «Tertium non datur» mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit*, Math. Ann. **93** (1924), p. 1-36.

[32] W. ACKERMANN : *Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen*, Math. Annalen **99** (1928), p. 118-135.

[33] W. ACKERMANN : *Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik*, Math. Annalen **110** (1934), p. 390-413.

[34] P. BERNAYS : *Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der «Principia Mathematica»*, Math. Zeitschr. **25** (1926), p. 305-320.

[35] P. BERNAYS : *Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie*, Blätter f. deutsche Philosophie **4** (1930), p. 326-327.

[36] P. BERNAYS : *Methode des Nachweises von Widerspruchsfreiheit und ihre Grenzen*, Verhandl. Intern. Math. Kongresses, Zurich **2** (1932), p. 342.

[37] J. HERBRAND : *Les bases de la logique Hilbertienne*, Rev. de Méta. **37** (1930), p. 243-255.

[38] J. HERBRAND : *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Thèse de la Fac. des Sc. de Paris (1930).

[39] J. HERBRAND : *Sur le problème fondamental de la logique mathématique*, C. R. Soc. Sc. et L. Varsovie, cl. 3 **24** (1931), p. 12-56.

[40] J. HERBRAND : *Sur la non-contradiction de l'arithmétique*, Journ. f. Math. **166** (1931), p. 1-8.

[41] J. V.NEUMANN : *Zur Hilbertschen Beweistheorie*, Math. Zeitschr. **26** (1927), p. 1-46.

[42] Les comptes rendus des *Entretiens de Zurich* paraîtront prochainement.

[43] K. GÖDEL : *Über formal unentscheidbare Sätze der «Principia Mathematica» und verwandter Systeme*, Monatsh. f. Math. u. Phys. **38** (1931), p. 173-198.

[44] G. GENTZEN : *Untersuchungen über das logische Schliessen*, Math. Zeitschr. **39** (1934), p. 176-405.

[45] G. GENTZEN : *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, Math. Annalen **112** (1936), p. 493-565.

[46] K. REIDEMEISTER : *Exaktes Denken*, Philosophischer Anzeiger **3** (1928).

[47] *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, Verlag von S. Hirzel, Leipzig (1934-1938); les cinq premiers cahiers ont déjà paru.

[48] K. ADJDUKIEWICZ : *Der logistische Antiirrationalismus in Polen*, Erkenntnis **5** (1935), p. 151-161.

[49] K. ADJDUKIEWICZ : *Sprache und Sinn*, Erkenntnis **4** (1934), p. 100-138.

[50] St. LESNIEWSKI : *Über Definitionen in der sogenannten Theorie der Deduktion*, C. R. Soc. Sc. Varsovie, cl. 3 **23** (1930).

[51] J. ŁUKASIEWICZ et A. TARSKI : *Untersuchungen über das Aussagenkalkül*, C. R. Soc. Sc. Varsovie, cl. 3 **23** (1930), p. 30-50.

[52] A. TARSKI : *Grundlegung der wissenschaftlichen Semantik*, Actes du congrès de philosophie scientifique, Paris **3** (1935-1936), p. 1-8.

[53] J. ŁUKASIEWICZ : *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Sytemen der Aussagenlogik*, C. R. Soc. Sc. Varsovie, cl. 3 **23** (1930), p. 51-77.

[54] C.W. MORRIS : *Some aspects of recent American scientific philosophy*, Erkenntnis **5** (1935), p. 142-149.

[55] Voir par exemple E. V.HUNTINGTON : *The postulational method in mathematics*, The American mathematical monthly **41** (1934), p. 84-92.

[56]* R. FEYS : *Directions nouvelles de la logistique aux États-Unis*, Revue néo-scolastique de philosophie, 2e série **55** (1937), p. 398-411.

[57] W.V. QUINE : *A system of logistic*, Harvard University Press, Cambridge, Mass. (1934).

[58] W.V. QUINE : *Toward a calculus of concepts*, Journal of Symbolic Logic **1** (1936), p. 2-25.

[59] A. CHURCH : *A set of postulates for the foundation of logic I*, Annals of mathematics, 2e s. **33** (1932), p. 355-357.

[60] A. CHURCH : *A set of postulates for the foundation of logic II*, Annals of mathematics, 2e s. **34** (1933), p. 839-864.

[61] A. CHURCH : *Mathematical logic*, mimeographed, Princeton N.J. (1936).

[62] H.B. CURRY : *Analysis of logical substitution*, Amer. Jour. math. **51** (1929), p. 363-384.

[63] H.B. CURRY : *Grundlagen der kombinatorischen Logik*, Amer. Jour. math. **52** (1930), p. 509-536, 789-834.

[64] C.I. LEWIS and C.H. LANGFORD : *Symbolic logic*, Century Co, New-York (1932).

[65] C.I. LEWIS : *Emch's calculus and strict implication*, Jour. Symb. Logic **1** (1936), p. 77-86.

[66]* Par exemple H.B. SMITH : *Modallogic — a revision*, Philosophy of science **4** (1937), p. 383-384.

[67]* F. ORESTANO : *Nouvelles vues logiques*, Actes du IX[e] Congrès International de Philosophie **6**, p. 64-68.

[68] F. ORESTANO : *Logica del potenziamento e logica dei comportamenti*, Archivio di Filosofia (1936).

[69]* R. POIRIER : *Le nombre*, F. Alcan, Paris (1938).

[70] P. FRANK : *Die Prager Vorkonferenz* 1934, Erkenntnis **5** (1935), p. 2-5.

[71] R. CARNAP : *Le problème de la logique de la science*, Hermann et C[ie], Paris (1935), p. 18.

[72]* H. REICHENBACH : *La philosophie scientifique, une esquisse de ses traits principaux*, Travaux du IX[e] Congrès International de Philosophie **4** (1936), p. 86-91.

[73] H. HAHN : *Logik, Mathematik und Naturerkennen*, Collection «Einheitswissenschaft», Gerold et C[ie], Wien.

[74] Voir aussi R. CARNAP : *Logische Syntax der Sprache*, Julius Springer, Wien (1934).

[75] R. CARNAP : *L'ancienne et la nouvelle logique*, Hermann et C[ie], Paris (1933).

[76] E.J.L. BROUWER : *Begründung der Mengenlehre unabhangig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten*. Verh. Akad. Wet. Amsterdam **12** n[os] 5 et 7 (1918-1919).

[77] E.J.L. BROUWER : *Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik*, Math. Annalen **93** (1925), p. 244-257 et **95**, p. 251-256.

[78] E.J.L. BROUWER : *lntuitionistische Betrachtungen über den Formalismus*, Proc. Akad. Wet. Amsterdam **21**, p. 374-379.

[79] A. HEYTING : *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, S.B. Preuss. Akad. Wissenschaften (1930), p. 42-56.

[80] A. KOLMOGOROFF : *Zur Deutung der intuitionistischen Logik*, Math. Zeitschr. **35** (1932), p. 58-65.

[81]* Voir aussi E.W. BETH : *L'évidence intuitive dans les mathématiques modernes*, Travaux du XI[e] Congrès International de Philosophie **6**; *Actualités scientifiques et industrielles*, Hermann, Paris (1937).

[82] G. MANNOURY : *Die signifischen Grundlagen der Mathematik*, Erkenntnis **4** (1934), p. 288-309 et 317-345.

[83]* J.L. DESTOUCHES : *Sur l'unité de la Physique théorique*, Bulletin Sci. École Polytechn., Timasoara **8** (1938), p. 49-70.

[84]* J.L. DESTOUCHES : *Sur la forme générale des théories physiques*, Institutul de arte grafice, «Ardealul», Cluj (1938).

[85] J. MARIANI : *Les limites des notions d'objet et d'objectivité*, Hermann et C[ie], Paris (1938).

[86] P. FÉVRIER : *Les relations d'incertitude de Heisenberg et la logique*, Travaux du IX[e] Congrès International de Philosophie **6**, p. 88-94.

[87]* P. FÉVRIER : *Sur une forme générale de la définition d'une logique*, C.R. Acad. Sc. **204**, Paris (1937), p. 958-959.

[88] F. GONSETH : *Les mathématiques et la réalité*, F. Alcan, Paris (1936).

[89]* F. GONSETH : *Qu'est-ce que la logique ?* Hermann et C[ie], Paris (1937).

[90] Voir E. BOREL : *Cinq lettres sur la théorie des ensembles*, dans les *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris (1914), p. 150-160.

[91] G. BACHELARD : *Le nouvel esprit scientifique*, F. Alcan, Paris (1934).

[92] G. BACHELARD : *Le pluralisme cohérent de la chimie moderne*, Vrin, Paris.

[93]* G. BACHELARD : *L'expérience de l'espace dans la physique moderne*, F. Alcan, Paris (1937).

[94] G. BACHELARD : *La dialectique de la durée*, Boivin, Paris.

[95] R. POIRIER : *Essai sur quelques caractères des notions d'espace et de temps*, Vrin, Paris (1932).

[96]* J. CAVAILLÈS : *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*, Hermann, Paris (1938).

[97]* J. CAVAILLÈS : *Méthode axiomatique et formalisme*, Hermann, Paris (1938).

[98]* A. LAUTMANN : *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, Hermann et C[ie], Paris (1938).

[99]* A. LAUTMANN : *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel*, Hermann, Paris (1937).

TABLE DES MATIÈRES